



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

FORTALEZA

2015

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Evandro Parente Junior, D.Sc.

FORTALEZA

2015

CARLOS DAVID RODRIGUES MELO

ESTUDO DO COLAPSO PROGRESSIVO DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO
ARMADO VIA ANÁLISE NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: ____/____/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Evandro Parente Junior, D.Sc. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Antônio Macário Cartaxo de Melo, Ph.D. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. João Batista Marques de Sousa Junior, D.Sc. (Membro Interno)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D.Sc. (Membro Externo)
Universidade Federal de Ouro Preto(UFOP)

Que este trabalho possa beneficiar, direta
ou indiretamente, todos os seres vivos.

AGRADECIMENTOS

Há uma frase de Sir Isaac Newton que traduz muito bem meu sentimento ao escrever este texto de agradecimentos: "Se vi mais longe ... é porque me apoiei nos ombros de gigantes. E, no meu caso, foram vários gigantes aos quais gostaria de prestar esta singela homenagem.

Gostaria de agradecer à minha Mãe, Maria do Socorro Rodrigues Melo, e à Tia Sônia por terem me criado tão bem e por sempre terem feito tantos sacrifícios por mim, mesmo quando eu era tolo em não reconhecer. Sem dúvida, sem o amor e os cuidados de vocês duas não teria chegado onde cheguei, não só no aspecto profissional, mas humano, moral e emocional.

Gostaria de agradecer à minha amada esposa Patrícia por ser tão companheira, amiga, parceira e amorosa. Obrigado por dividir a vida comigo.

Gostaria de agradecer também ao Centro Budista Kadampa Bodhisattva por tantos ensinamentos, gestos de carinho e acolhimento nos melhores e piores momentos desta caminhada. À todos os Budas e Bodhisattvas por tantas bênçãos, carinho, proteção, sabedoria e compaixão. Ao querido amigo Geshe Kelsang Gyatso (Geshe-la) por ser um refúgio 24 horas por dia. À minha querida professora Gen Kelsang Zangmo, por ter tanta paciência, compaixão, sabedoria e boa vontade com este humilde aluno. À Neide Maia por tantas conversas, caronas, desabafos e carinho. À Lenilce, por ser sempre tão gentil e a toda a minha querida sanga.

Gostaria de agradecer aos professores e funcionários do PEC-UFC por tudo que fizeram por mim, em especial ao Professor Evandro Parente Junior por toda a orientação profissional e moral em todos esses anos. Muito obrigado por ser um modelo para todos nós alunos. Espero um dia ser um professor e orientador tão bom para meus alunos quanto o senhor foi para mim.

Ao Bergson, por tantas discussões enriquecedoras e valiosas contribuições para a realização deste trabalho.

À todos os companheiros do Laboratório e do mestrado: Elias, Rafael, Eduardo, Edson, Lucas, Luiz Antônio, Iuri, Pedro, Daniel e todos os outros. Obrigado por tantos momentos de parceria, companheirismo e valiosas discussões sempre tão enriquecedoras e agradáveis.

À todos que, de uma maneira direta ou indireta, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

"O amor é a verdadeira bomba atômica que destrói todos os inimigos, pois quando se ama todos os seres, não há mais ninguém a quem chamar de inimigo.

Venerável Geshe Kelsang Gyatso Rinpoche

RESUMO

A garantia da segurança é uma das principais preocupações dos projetos de estruturas civis. Além das falhas devidas aos carregamentos permanentes e acidentais, é preciso considerar também aquelas ocasionadas por carregamentos especiais ou situações extremas, como sismos, incêndios e explosões. Um dos mecanismos de falha que tem atraído o interesse dos projetistas e pesquisadores nos últimos anos é o Colapso Progressivo (CP), onde uma ação inicialmente localizada acaba tendo um efeito desproporcional sobre a estrutura, podendo levá-la até ao colapso total. Visando contribuir para o estudo deste fenômeno, este trabalho visa desenvolver uma ferramenta computacional capaz de modelar de forma adequada o Colapso Progressivo de estruturas planas de concreto armado. Esta ferramenta é constituída de elementos de pórtico plano baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e leva em consideração a não linearidade geométrica e a não linearidade física. Para a primeira é utilizada a descrição cinemática corrotacional de maneira a permitir a representação adequada do comportamento da estrutura quando sujeita a grandes deslocamentos e rotações. Para representação da não linearidade física, foram implementados modelos constitutivos inelásticos uniaxiais para o concreto e o aço baseados na Teoria da Plasticidade e da Mecânica do Dano. Para a integração dos esforços internos e da matriz tangente na seção transversal da barra, foram utilizados o Método das Fatias e a Quadratura de Gauss. Todas as formulações foram implementadas no programa acadêmico FAST (*Finite Element Analysis Tool*) que vem sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC). A ferramenta foi inicialmente verificada e validada pela modelagem de exemplos disponíveis na literatura. Inicialmente foram considerados exemplos clássicos (*benchmarks*) de vigas e pórticos com comportamento elástico e elastoplástico, seguido da análise de pórticos de concreto armado ensaiados em estudos sobre colapso progressivo. Os resultados obtidos para os exemplos elastoplásticos apresentam uma concordância muito boa com os resultados esperados. No caso das estruturas de concreto armado, os resultados obtidos foram satisfatórios, considerando a maior complexidade do problema e o desconhecimento de alguns dados importantes para a simulação computacional. Assim, pode-se verificar que a ferramenta mostrou-se capaz de modelar o comportamento não linear físico e geométrico de estruturas de concreto em situação de colapso progressivo, incluindo a perda inicial de resistência e a recuperação desta devido ao efeito catenária. Os estudos paramétricos realizados mostraram que a taxa de armadura é o parâmetro mais importante para a resistência ao colapso progressivo, influenciando tanto a capacidade de carga inicial quanto após o aparecimento do efeito catenária. Por outro lado, a resistência do concreto teve pequena influência, enquanto o cobrimento da armadura tem um efeito importante sobre a capacidade de carga inicial, mas não apresenta influência sobre o efeito catenária.

Palavras-chave: Concreto Armado, Análise Não Linear, Colapso Progressivo, Elementos Finitos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Edifício Ronan Point após o colapso parcial.	6
Figura 2 – Edifício Alfred P. Murrah.	7
Figura 3 – Desmoronamento do Ed. Liberdade no Rio de Janeiro-RJ em 2012 ⁷ . . .	8
Figura 4 – Metodologias e Estratégias para prevenção do Colapso Progressivo. . . .	12
Figura 5 – Critério de verificação do GSA para prevenção do CP.	14
Figura 6 – Efeito Catenária	17
Figura 7 – Ensaio de um pórtico de quatro vãos e três andares	17
Figura 8 – Efeito Membrana	18
Figura 9 – Classificação de ligações segundo o Eurocode.	20
Figura 10 – Diagrama para cálculo da resistência de ligação (F_l) segundo o Cógido Britânico ^{41?}	21
Figura 11 – Locação de retirada de colunas segundo o GSA.	23
Figura 12 – Descrição cinemática co-rotacional.	27
Figura 13 – Modos de deformação local para o elemento de pórtico plano	27
Figura 14 – Aproximação da integral de $f(x)$ pelo Método das Fatias	38
Figura 15 – Divisão de uma seção retangular pelo Método das Fatias	39
Figura 16 – Modelo constitutivo para o concreto na compressão segundo a NBR 6114:2014.	40
Figura 17 – Modelo constitutivo para o concreto na tração segundo a NBR 6114:2014.	40
Figura 18 – Modelo constitutivo para o aço segundo a NBR 6118:2014.	41
Figura 19 – Modelo constitutivo para o concreto na compressão segundo o Eurocode 2.	41
Figura 20 – Esquema para representar o comportamento elastolástico perfeito.	43
Figura 21 – Comportamento do Dispositivo de Atrito de Coulomb.	44
Figura 22 – Efeito Bauschinger.	46
Figura 23 – Encruamento Isotrópico.	47
Figura 24 – Hardening Independente	47
Figura 25 – Representação da estrutura matemática do Hardening	48
Figura 26 – Modelo em treliça utilizado para testar os modelos constitutivos.	54
Figura 27 – Teste do modelo de plasticidade perfeita.	54
Figura 28 – Teste para Avaliar o modelo de Plasticidade com Endurecimento Linear, não linear e Exponencial.	55
Figura 29 – Teste do modelo REBAR.	58
Figura 30 – Teste do modelo constitutivo plástico para o aço na compressão e tração.	59
Figura 31 – Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão.	62
Figura 32 – Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão e tração.	62

Figura 33 – Processo de evolução de fissuração distribuída para a uma trinca discreta.	63
Figura 34 – Modelos constitutivos com dano e plasticidade.	65
Figura 35 – Modelo de dano bilinear	65
Figura 36 – Teste do modelo de dano na compressão.	66
Figura 37 – Teste do modelo de dano na compressão e na tração.	66
Figura 38 – Visão geral da arquitetura do FAST.	67
Figura 39 – Condições de contorno, geometria e propriedades do material do exemplo	71
Figura 40 – Curva carga-deslocamento vertical da viga em balanço.	72
Figura 41 – Curvas carga-deslocamento da viga em balanço.	72
Figura 42 – Geometria e propriedades do Pórtico Toggle.	73
Figura 43 – Efeito do número de elementos.	74
Figura 44 – Efeito do número de fatias.	75
Figura 45 – Efeito no número de pontos de Gauss.	75
Figura 46 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle.	76
Figura 47 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle com imperfeição.	76
Figura 48 – Ensaio do pórtico IMF-NIST.	77
Figura 49 – Dados do pórtico IMF-NIST.	78
Figura 50 – Modelo 1 do pórtico IMF-NIST.	79
Figura 51 – Modelo 2 do pórtico IMF-NIST.	79
Figura 52 – Modelo 3 do pórtico IMF-NIST.	79
Figura 53 – Comparação entre os modelos do pórtico IMF-NIST.	80
Figura 54 – Comparação entre os modelos para aço do pórtico IMF-NIST.	81
Figura 55 – Efeito do cobrimento da armadura do pórtico IMF-NIST.	82
Figura 56 – Geometria e seções transversais do Pórtico de Yi.	83
Figura 57 – Malha utilizada no Pórtico de Yi.	84
Figura 58 – Relação carga-deslocamento do pórtico de Yi.	85
Figura 59 – Variação do f_{ck} do Pórtico de Yi.	86
Figura 60 – Variação da área de aço do Pórtico de Yi.	87
Figura 61 – Variação do cobrimento da armadura do Pórtico de Yi.	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Caracterização ocupacional e requerimentos de projeto segundo o DoD. .	16
Tabela 2	– Fator de incremento de carga para Análise Linear segundo o GSA. . . .	24
Tabela 3	– Fator de incremento de carga para Análise mão Linear segundo o GSA.	24
Tabela 4	– Pontos de Gauss.	37
Tabela 5	– Funções $G(\alpha)$ utilizadas	50
Tabela 6	– Propriedade das barras de aço do Pórtico IMF-NIST.	78

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Estrutura deste trabalho	9
2	COLAPSO PROGRESSIVO	10
2.1	Abordagem Não Estrutural ou Controle de Eventos	13
2.2	Abordagens Estruturais	15
2.2.1	Métodos Indiretos de Projeto	15
2.2.1.1	Método da força de Conexão (<i>Tie Force Method</i>)	19
2.2.2	Métodos Diretos de Projeto	21
2.2.2.1	Método da Resistência Local Específica	21
2.2.2.2	Método do Caminho Alternativo de Carga	22
3	ANÁLISE NÃO LINEAR	26
3.1	Formulação Co-rotacional	27
3.1.1	Elemento local	31
3.2	Integração Numérica	35
3.2.1	Quadratura de Gauss	36
3.2.2	Método das Fatias	37
3.3	Modelos Constitutivos para Concreto Armado	39
3.3.1	Modelos Constitutivos Elásticos	39
3.3.2	Modelos Constitutivos Elastoplásticos	42
3.3.2.1	Plasticidade Perfeita	43
3.3.2.2	Plasticidade com Endurecimento Isotrópico	45
3.3.2.3	Modelo constitutivo do aço	55
3.3.2.4	Plasticidade com (<i>Softening</i>) para concreto	59
3.3.3	Mecânica do Dano	63
3.3.3.1	Modelo de Dano Bilinear	65
3.4	Implementação Computacional	67
4	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	71
4.1	Viga em Balanço	71
4.2	Pórtico Toogle	73
4.3	Pórtico IMF-NIST	77
4.4	Pórtico de Yi	82
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	89

REFERÊNCIAS 91

1 INTRODUÇÃO

No projeto de estruturas, deve-se tentar prever as possíveis solicitações nas quais estas serão submetidas ao longo da sua vida útil e buscar evitar, ou pelo menos amenizar, os seus efeitos críticos. Para isso, deve-se considerar os carregamentos e as condições ambientais nas quais a estrutura estará submetida ao longo deste período. Isto permite diminuir possíveis riscos à vida e à própria edificação.

No que diz respeito às ações externas, deve-se considerar efeitos devidos aos carregamentos permanentes, acidentais e situações extremas. Estas, apesar de menos comuns, podem ter efeitos catastróficos, sendo uma das possíveis consequências o Colapso Progressivo (CP). Este fenômeno tem ganhado foco nas pesquisas e nos textos normativos internacionais nos últimos anos e ocorre quando uma ação localizada provoca uma avaria desproporcional em relação ao dano inicial, como na queda de um castelo de cartas¹⁻³.

O Colapso Progressivo ganhou mais atenção a partir do colapso parcial do edifício *Ronan Point*, em Londres, no ano de 1968⁴. Este edifício era constituído de painéis de concreto pré-moldado e entrou parcialmente em colapso após uma explosão causada por um vazamento de gás no 18º andar, conforme ilustra a Figura 1. Estudos posteriores mostraram que a edificação carecia de ductilidade devido ao tipo de ligação adotada para os painéis de concreto^{4,5}.

Figura 1 – Edifício Ronan Point após o colapso parcial.



fonte: <http://www.failedarchitecture.com/the-downfall-of-british-modernist-architecture/>, acessado em Setembro de 2015.

Outro caso bastante significativo e descrito no site do FBI⁶ (*Federal Bureau of Investigation*) foi o ataque terrorista ao Edifício *Alfred P. Murrah*, instalação de diversos escritórios do governo americano em *Oklahoma City*, no ano de 1995. Um caminhão bomba

que estava estacionado na frente do prédio explodiu causando um dano muito grande à parte norte da estrutura conforme mostram as Figuras 2 (a) e (b). Estudos¹ mostraram que o dano se espalhou por cerca de 21,3 m de largura do edifício e que três pilares que sustentavam uma viga no terceiro andar foram imediatamente destruídos pela explosão, provocando um colapso progressivo dos andares superiores.

Figura 2 – Edifício Alfred P. Murrah.

(a) Antes do colapso.



(b) Depois do colapso.



fonte: <http://www.failedarchitecture.com/the-downfall-of-british-modernist-architecture/>, acessado em Setembro de 2015.

Casos de Colapso Progressivo também podem ser encontrados no Brasil. Em 2012, no Rio de Janeiro, entrou em colapso o Edifício Liberdade. Este tinha vinte andares e seu desabamento desencadeou o colapso de mais dois edifícios vizinhos: o Edifício Colombo, com dez andares, e o Edifício Treze de Maio, com quatro andares. Na Figura 3 é possível verificar a disposição destes edifícios antes do colapso. A perícia indicou que as modificações realizadas por uma reforma no 9º andar comprometeram a estrutura e provocaram o desencadeamento do colapso em um efeito dominó⁷. Ao todo, 22 pessoas morreram.

Desde o emblemático caso do *Ronan Point* na década de 60, diversos estudos significativos vem sendo realizados com a finalidade de melhor compreender e modelar tal fenômeno. Trabalhos pioneiros como o de Ellingwood⁸, por exemplo, já começavam a discutir algumas abordagens para análise e prevenção do CP em 1978 e viriam a influenciar diversos códigos normativos no mundo.

No entanto, Mohamed⁹ lembra que, desde o atentado terrorista ao *World Trade Center* em Nova York no ano de 2001, a literatura científica e técnica relacionada ao CP tem crescido significativamente, pois o aumento da preocupação com a robustez das edificações, aliada ao desenvolvimento da Mecânica Computacional e da capacidade de processamento dos computadores propiciou o aumento da capacidade e viabilidade de análises estruturais cada vez mais complexas.

Figura 3 – Desmoronamento do Ed. Liberdade no Rio de Janeiro-RJ em 2012⁷



Fonte: <http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2012/01/peritos-investigam-causas-de-desabamento-no-rio.html>, Acessado em Setembro 2015.

Nos últimos quatorze anos podem-se encontrar diversos trabalhos que deram importantes contribuições para o estudo e prevenção do CP. Exemplos destes são Li *et al*¹⁰, que propuseram um novo método para calcular a força de ligação (*Tie Force*) entre elementos de estruturas de concreto armado considerando uma redistribuição espacial de esforços, efeitos dinâmicos e correção de forças internas e Salem *et al*¹¹, que se utilizam de um modelo de fissuração discreta tridimensional para estudar e obter um projeto econômico e eficiente para resistir ao CP. Também é importante destacar diversos trabalhos que realizaram ensaios, em escala real e reduzida, de estruturas de concreto armado¹²⁻¹⁴ e/ou em aço¹⁵⁻¹⁷, que além de contribuir para o entendimento do fenômeno em si, podem ser utilizados como *benchmarks* para diversos modelos computacionais.

Nesse sentido, o desenvolvimento de modelos computacionais capazes de captar o CP mostra-se de grande utilidade para se obter edificações cada vez mais seguras e econômicas, pois pode-se verificar a sua capacidade de resistir a diversos agentes externos críticos como impactos de automóveis, ataques terroristas, sismos, etc, sem grandes custos.

No entanto, a modelagem de eventos que levam o concreto ao seu limite de resistência tem forte dependência da consideração da não linearidade física e geométrica. Dessa forma, o modo como estes são levados em consideração está diretamente relacionado com a acurácia do modelo e, conseqüentemente, com a segurança e economia da edificação.

Este trabalho tem como objetivo principal contribuir para a melhor compreensão deste fenômeno. Para isso, busca desenvolver uma ferramenta computacional capaz de captar de maneira adequada o efeito do CP em estruturas planas de concreto armado. Além disso, busca realizar um extenso levantamento bibliográfico capaz de caracterizar o estado da arte do assunto na atualidade.

Nesta dissertação, é utilizado o programa acadêmico FAST (*Finite Element Analysis Tool*). Este programa é baseado no Método dos Elementos Finitos e contém elementos unidimensionais, planos e sólidos. Além disso, vem sendo desenvolvido por diversos alunos e professores do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Antes do início deste trabalho, o FAST já possuía a formulação cinemática Corrotacional, capaz de captar grandes deslocamentos e responsável pela não linearidade geométrica. Em relação à não linearidade física, principal contribuição deste trabalho, modelos constitutivos unidimensionais inelásticos baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica dos Dano foram implementados e explorados para melhor compreender o CP. A Integração dos esforços e da Matriz de Rigidez Tangente é realizada através da Quadratura de Gauss e do Método das Fatias.

1.1 Estrutura deste trabalho

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro, estão a introdução, motivação e objetivos desse trabalho. Neste, busca-se traçar um panorama geral do colapso progressivo na atualidade de maneira a apresentar casos já ocorridos, e o que já se conhece sobre o assunto.

Nó capítulo 2, busca-se apresentar o estado da arte da modelagem, prevenção e compreensão do Colapso Progressivo. Aqui é traçado um panorama de acordo com os principais textos normativos internacionais que consideram o assunto, bem como dos mais recentes avanços do conhecimento relacionado.

Já no Capítulo 3, apresentam-se os conceitos de análise não linear utilizados para a modelagem do CP. Neste, encontram-se a formulação do elemento utilizada, descrição cinemáticas, técnicas de integração e os modelos constitutivos. Estes últimos são apresentados através da descrição do comportamento esperada, formulações matemáticas e quadros resumo dos algoritmos implementados.

No Capítulo 4, estão os testes realizados para validar a ferramenta e estudar diversos aspectos do fenômeno.

E, finalmente, no Capítulo 5, estão as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

2 COLAPSO PROGRESSIVO

Não há na literatura técnica uma definição única para Colapso Progressivo. Do ponto de vista do *United States General Services Administration (GSA)*, conforme descrito no *Progressive Collapse Analysis and Design Guidelines* de 2013², o CP está relacionado a um dano desproporcional à magnitude do evento inicial, fato que o leva a ser também conhecido como Colapso Desproporcional.

O relatório elaborado pelo *United States National Institute of Standards and Technology (NIST-7396)* em 2007 intitulado *Best Practices for Reducing the Potential for Progressive Collapse in Buildings*¹, assim como a norma *ASCE/SEI 7-10 Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*¹⁸, definem CP como uma propagação de danos locais, a partir de um evento iniciador, de um elemento para outro, resultando eventualmente no colapso de uma estrutura inteira ou uma parte desproporcionalmente grande desta.

No Eurocode,¹⁹ não há uma definição específica para CP. No entanto, há o conceito de robustez, definida como a habilidade de uma estrutura resistir a eventos extremos como incêndios, explosões, impactos ou consequência de erros humanos, sem ser danificada de maneira desproporcional ao dano original. Dessa forma, quanto mais robusta for uma estrutura, menos suscetível ao CP ela será.

Apesar dessas e de diversas outras normas técnicas apresentarem diferentes modos de definir esse evento, todos concordam em caracterizá-lo como a ocorrência de um dano desproporcional a uma falha inicial da estrutura. Starossek²⁰ complementa essas definições afirmando que há diferentes mecanismos que dão origem ao CP e propõe uma classificação baseada nestes conforme pode ser visto a seguir:

- **Colapso tipo panqueca (*pancake-type collapse*):** É provocado pela perda da capacidade total ou parcial de um elemento estrutural vertical. Esta faz com que uma parte superior da estrutura, como uma laje, desabe sobre a imediatamente abaixo e fazendo com que esta também venha a colapsar pelo excesso de carga, gerando uma reação em cadeia. Neste tipo de colapso, a propagação do dano é essencialmente vertical, foi o caso o ocorrido no atentado do *World Trade Center*, em Nova York.
- **Colapso tipo zíper (*zipper-type collapse*):** Colapso provocado pela falha de um dos elementos estruturais fazendo surgir uma carga impulsiva na estrutura com uma propagação de dano tipicamente transversal. Um exemplo é à falha de um cabo em uma ponte estaiada ou um dos tirantes em uma cortina de contenção atirantada.
- **Colapso tipo dominó (*domino-type collapse*):** Colapso característico de sistemas horizontais como redes de transmissão de energia. Neste, o tombamento de um elemento provoca a falha do seguinte e assim por diante. A transmissão de

dano pode ser paralela ou perpendicular a força aplicada, mas essencialmente horizontal.

- **Colapso de seção (*section-type collapse*):** Colapso provocado pela propagação de um corte na seção originado pelo rompimento de um filete de solda ou pela ruptura de uma barra da armadura de uma viga de concreto, por exemplo. Isto provoca a falha da seção e sobrecarrega criticamente outros elementos que também colapsam. O autor afirma que a principal diferença entre este e o colapso do tipo zíper é que no primeiro o mecanismo de falha trabalha com um sistema contínuo e o segundo com um discreto.
- **Colapso do tipo misto (*mixed-type collapse*):** Dado pela combinação dos outros tipos de colapso. Pode ser encontrado no caso do atentado ao edifício *Alfred P. Murrah*, dado pela associação do colapso tipo panqueca e do tipo zíper.

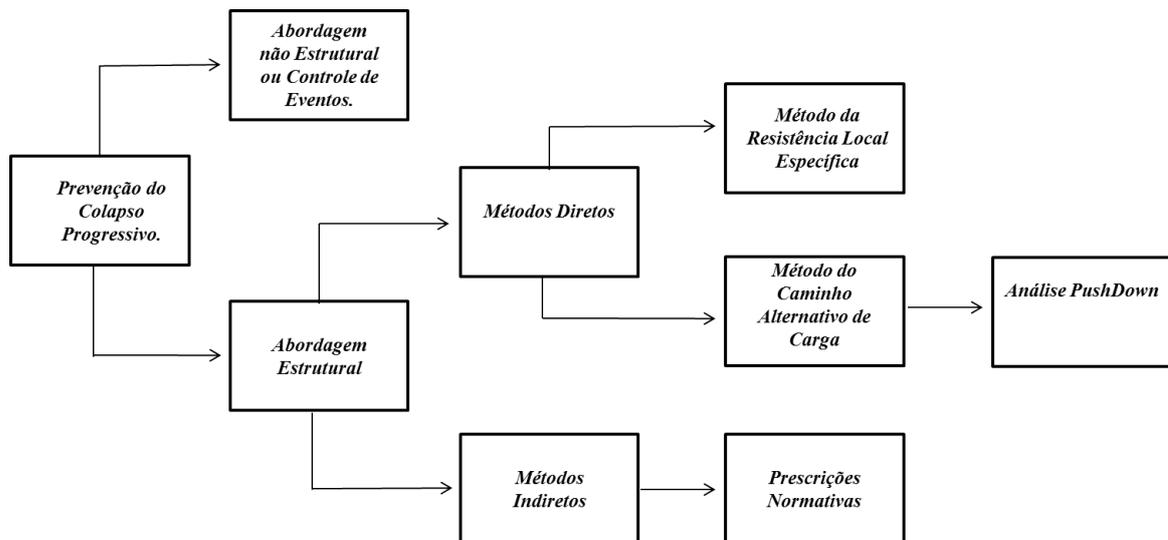
Baseado nestas definições, o autor afirma que uma melhor compreensão teórica das diversas categorias do fenômeno podem contribuir para o desenvolvimento e melhoria dos mecanismos de prevenção ao CP.

Geralmente, divide-se a abordagem de controle do Colapso Progressivo em dois ramos: **Abordagem Não Estrutural** e **Abordagem Estrutural**. Na primeira há a preocupação de prevenir que a estrutura seja exposta a eventos que possam desencadear o CP. Para isso, são tomadas medidas de segurança de caráter exclusivamente preventivo. Assim, esta abordagem também é conhecida como **Controle de Eventos**.

Na segunda opção, considera-se que o evento desencadeador do CP já ocorreu e que deve-se voltar a atenção em verificar se a estrutura vai ser capaz de resistir aos esforços solicitantes calculados. Para isso, pode-se fazer uma análise estrutural e dimensionar os elementos diretamente, abordagem conhecida como Método Direto de Projeto (*Direct Design Approach*). Este contém dois métodos principais: o Método da Resistência Local Específica (*Specific Local Resistance Method*) e o Método do Caminho Alternativo de Carga (*Alternate Load Path Method*). As análises geralmente utilizadas incluem as estáticas e dinâmicas, lineares e não lineares. Uma abordagem alternativa é a Análise *Push-Down*, que consiste em uma aproximação estática de respostas obtidas em uma análise dinâmica. Esta foi adaptada para o CP a partir da *Análise Push-over*, geralmente utilizada para sismos²¹⁻²⁴.

A outra opção consiste em utilizar uma série de prescrições normativas para garantir a continuidade e redundância adequada da estrutura sem a necessidade de procedimentos mais complexos e trabalhosos. Esta abordagem é esta conhecida como Método Indireto de Projeto (*Indirect Design Approach*). A organização destas metodologias e estratégias podem ser visualizadas na Figura 4.

Figura 4 – Metodologias e Estratégias para prevenção do Colapso Progressivo.



Fonte: Próprio autor.

De maneira geral, estas metodologias visam reduzir a probabilidade (P) de que o Colapso Progressivo (CP) venha a ocorrer. No entanto, se utilizam de procedimentos diferentes. Isso pode ser mais facilmente compreendido analisando a expressão:

$$P(CP) = P(CP|LD) \cdot P(LD|H) \cdot P(H) \quad (1)$$

onde $P(CP)$ é a probabilidade de haver Colapso Progressivo na estrutura, $P(H)$ é a probabilidade de haver um evento crítico (H), $P(LD|H)$ é a probabilidade do evento (H) provocar um dano local (LD) e $P(CP|LD)$ é a probabilidade de um dano local (LD) seja transmitido a outras partes da estrutura e provoque um Colapso Desproporcional (CP)¹.

Analisando a Equação (1), pode-se traçar uma perspectiva global do modo como os diversos textos normativos e trabalhos científicos abordam o CP. No Controle de Eventos, o foco é na diminuição de $P(H)$, isto é, visa exclusivamente impedir que haja eventos que venham a aplicar cargas prejudiciais à estrutura. Já na *abordagem estrutural*, considera-se que o evento já ocorreu, $P(H) = 1$, e deve-se projetar a estrutura para receber o carregamento adicional.

No Método da Resistência Local Específica (MRLE), considera-se que o evento (H) não deve gerar um dano inicial na estrutura. Isto é, visa diminuir $P(LD|H)$. Isso é realizado através do reforço de todos ou apenas alguns pilares específicos (pilares-chaves) de maneira que estes não sofram danos significativos devido aos esforços adicionais e nem os transmitam aos demais elementos da estrutura.

Já no Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC), considera-se que $P(LD|H)$ e $P(H)$ são iguais a 1. Isto é, já houve um evento com potencial para provocar Colapso Progressivo e este já causou um dano local como a perda de um ou mais pilares, neste caso. O método consiste em propiciar continuidade e redundância estrutural para que o esforço extra seja re-

distribuído aos outros elementos da estrutura sem causar uma propagação desproporcional do dano.

As *Prescrições de Projeto* tem objetivos semelhantes ao MCAC. No entanto, esta realiza uma série de recomendações para tornar a estrutura mais robusta de maneira mais rápida e sem grandes cálculos.

2.1 Abordagem Não Estrutural ou Controle de Eventos

Esta abordagem é discutida profundamente no NIST 7396¹ e consiste em adotar medidas não estruturais e preventivas para diminuir a probabilidade de que um evento em potencial (*H*) desencadeie um CP. É considerada a metodologia com melhor custo-benefício e inclui mudanças no local de construção do edifício, controle de acesso e de materiais inflamáveis/explosivos, etc.

As medidas a serem tomadas são proporcionais ao grau de proteção que a edificação requer e, portanto, necessitam de um espectro de risco da mesma. Há diferentes maneiras de definir a faixa de risco de uma dada edificação. Cada texto normativo utiliza-se de um critério e, de acordo com a classe de risco requerida, uma ou mais abordagens podem ser recomendadas.

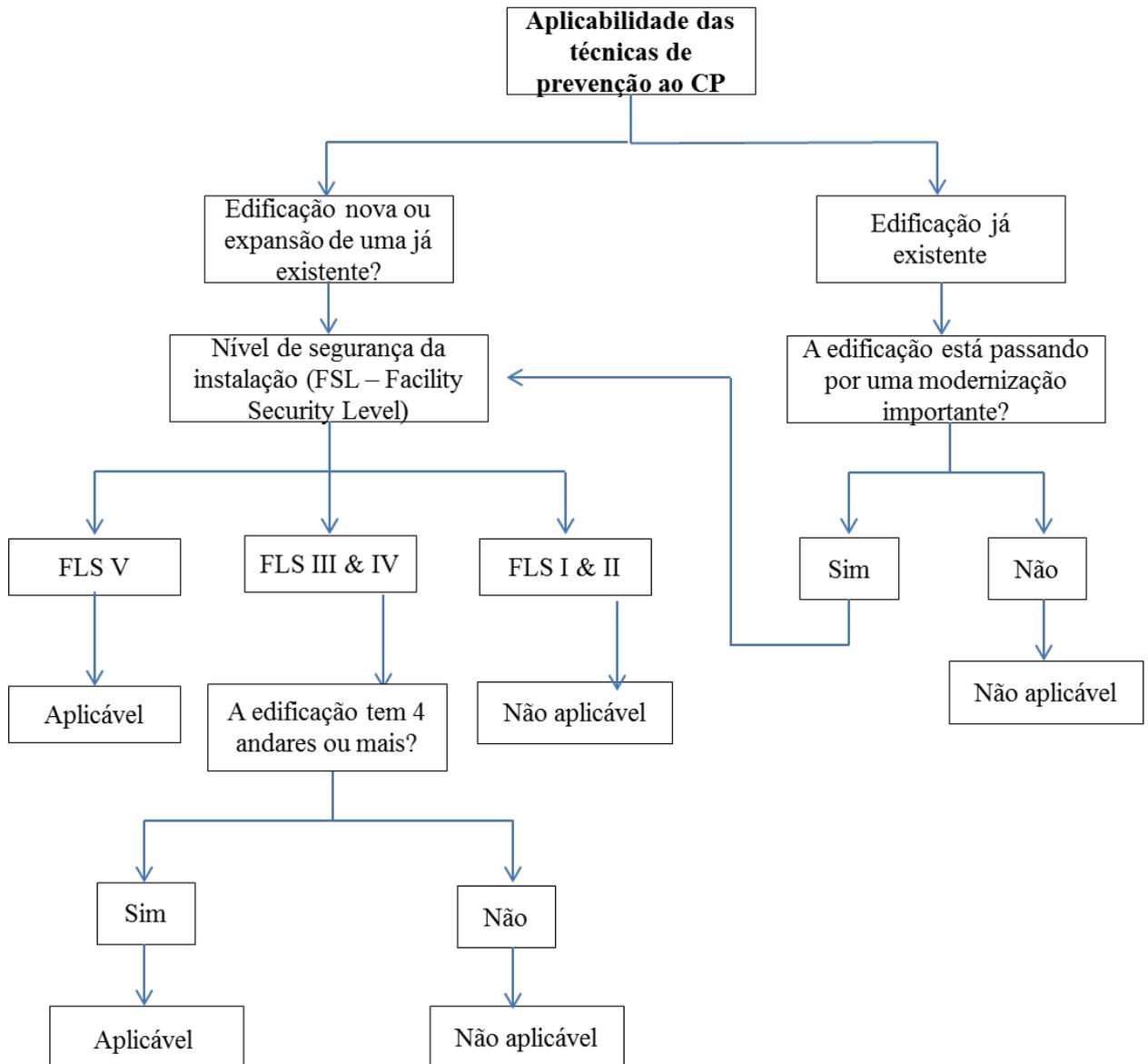
Um exemplo deste mapa de perigos é proposto na norma americana IS-892-2010 - *Physical Security Criteria for Federal Facilities*²⁵ (Critério de Segurança Física para Instalações Federais). Esta propõe a classificação da estrutura em classes de risco denominadas FSL (*Facility Security Levels*) que variam de I a V. Algumas normas, como o GSA², utilizam este coeficiente para verificar a necessidade de medidas de prevenção do CP, como indica a Figura 5.

Dessa forma, de acordo com a classificação de usabilidade da edificação, podem ser adotados níveis de medida de segurança diferentes. De maneira geral, o NIST 7396¹ recomenda que as medidas não estruturais de prevenção ao Colapso Progressivo devem contemplar a análise de quatro pontos muito importantes:

- Avaliação dos riscos inerentes à edificação;
- Medidas para diminuir os riscos associados e a exposição da edificação;
- Avaliação das consequências da falha;
- Avaliação de medidas alternativas para reduzir as consequências da falha.

A avaliação dos riscos inerentes diz respeito à identificação dos eventos críticos inerentes ao tipo de utilização da construção. Por exemplo, um laboratório onde haverá manipulação de substâncias inflamáveis terá risco de explosão, um prédio que tem os pilares expostos à rua correrá risco de impacto de veículos e assim por diante.

Figura 5 – Critério de verificação do GSA para prevenção do CP.



Fonte: GSA²

Já as medidas para diminuir a exposição da edificação e dos riscos associados descrevem o que pode ser feito para diminuir a probabilidade destes ocorrerem. No caso de edificações com alto risco de impactos de veículos, pode-se tentar realocar os pilares para uma posição mais afastada rua ou criar barreiras para absorver o impacto.

A avaliação das consequências da falha incentiva uma análise dos efeitos frente ao colapso da edificação. Esta também depende do uso que é dada à mesma e pode elevar o grau de proteção requerido. Por exemplo, o colapso de um hospital pode ter consequências muito mais devastadoras do que o de uma ponte.

E, por último, na avaliação de medidas alternativas para reduzir as consequências da falha buscam-se tomar medidas para diminuir os impactos do item anterior caso um dado

evento crítico não possa ser evitado. Um exemplo é mudar a utilização de uma edificação (de um hospital para um prédio de escritório, por exemplo), colocar alas mais críticas de um hospital para uma zona menos exposta ao CP ou até mesmo mudar a localização da construção.

Uma outra medida simples e não estrutural que pode ser tomada, diz respeito a reformas. Uma alteração em um dado elemento estrutural sem a avaliação de um especialista pode ter resultados trágicos, como aconteceu no colapso do Edifício Liberdade⁷ citado anteriormente. Neste caso, o maior rigor dos órgãos responsáveis pode prevenir diversos casos de CP em potencial.

2.2 Abordagens Estruturais

Como comentado anteriormente, a abordagem estrutural visa reduzir a probabilidade de ocorrência do Colapso Progressivo $P(CP)$ dado que um evento crítico em potencial já ocorreu, ou seja, $P(H) = 1$. Portanto, busca-se aqui a redução da probabilidade do evento provocar um dano local $P(LD|H)$ (Método da Resistência Local específica) e/ou da probabilidade de um dano local $P(CP|LD)$ ser transmitido a outras partes da estrutura (Método do Caminho Alternativo de Carga e Prescrições Normativas).

2.2.1 Métodos Indiretos de Projeto

Esta metodologia consiste em regulamentar uma série de prescrições normativas de maneira a oferecer continuidade e robustez à estrutura. Geralmente, não necessita de análises estruturais mais complexas, é considerada como uma prevenção inicial ou primária do Colapso Progressivo e é comumente indicada para edificações com baixo risco inerente de utilização^{1,3,18}.

Esta é a principal abordagem adotada pelo Código Britânico BS 5950-2000 desde o incidente do Ronan Point em 1968⁹ e pode ser encontrada também em diversos outros textos normativos, como a NBR 6118:2014²⁶, Eurocode 1:2004¹⁹ e ACI 318-2011²⁷.

Nesse sentido, o ASCE 7-10¹⁸ estabelece uma série de recomendações de projetos para melhorar a integridade estrutural e estas incluem: utilizar um sistema integrado de ligações entre os elementos estruturais, considerar o efeito catenária das lajes e vigas, compartimentalização da estrutura e assim por diante. No entanto, não há nenhuma indicação quantitativa no que diz respeito a utilização dos métodos Diretos ou Indiretos de Projeto.

Já o DoD³ classifica inicialmente a estrutura em uma Categoria de Ocupação (*Occupation Category*) que varia de I a IV. A partir disso são feitas indicações sobre as abordagens de prevenção do CP que devem ser adotadas, conforme pode ser visualizado na Tabela 1.

Tabela 1 – Caracterização ocupacional e requerimentos de projeto segundo o DoD.

CLASSIFICAÇÃO OCUPACIONAL	REQUERIMENTOS DE PROJETO
I	Sem requisitos específicos
II	Opção 1: Método da Força de Conexão (<i>Tie Force Method</i>) para toda a estrutura e o Método da Resistência Local Específica <i>Enhanced Local Resistance</i> para os pilares ou paredes estruturais dos cantos e os penúltimos no primeiro andar. ou Opção 2: Método do Caminho Alternativo de Carga (<i>Alternate Path Method</i>) para pilares específicos e mudança de locação das paredes estruturais.
III	Método do Caminho Alternativo de Carga para pilares específicos, mudança de locação das paredes estruturais e Método do Caminho Alternativo de Carga para todo o perímetro de pilares e paredes estruturais do primeiro andar.
IV	Método da Força de Conexão e Método do Caminho Alternativo de Carga para pilares e paredes estruturais e Método do Caminho Alternativo de Carga para todo o perímetro de pilares e paredes estruturais do primeiro andar.

Fonte: DoD³

No texto normativo brasileiro, NBR 6118:2014²⁶, a consideração do Colapso Progressivo é feita em dois tópicos: no item 14.6.4.3, que propõe condições de ductilidade para formação de rótulas plásticas em elementos reticulados (viga e pilar) e no item 19.5.4, que propõe uma armadura contra o Colapso Progressivo durante o detalhamento das lajes, quando existirem pilares no seu interior.

Estudos mais aprofundados e comparativos sobre o modo como esse assunto é abordado nas principais normas técnicas que tratam do assunto podem ser encontradas nos trabalhos de Mohamed⁹, Menchel²⁴ e, no já citado, NIST 7396¹.

O foco das especificações técnicas concentra-se na resistência das ligações dos elementos para que, caso um dos destes seja danificado, geralmente um pilar, a estrutura possa redistribuir os esforços adicionais e evitar a progressão do colapso. Este efeito é conhecido na literatura técnica como *Bridge Over*²⁴.

O *Bridge Over* ocorre devido a dois fenômenos chamados de *Efeito Catenária* e *Efeito de Membrana*. O primeiro ocorre quando, na perda de um pilar central, por exemplo, uma viga deixa de estar submetida a um estado de flexão e passa a estar sob flexo-tração com a seção completamente tracionada e apresentando comportamento semelhante à um cabo^{28,29}. Esse efeito pode ser facilmente visualizado na Figura 6.

Figura 6 – Efeito Catenária



Fonte: engineering.uottawa.ca³⁰

O *Efeito Catenária* já é bastante conhecido e tem sido foco de diversos estudos teóricos e práticos. Valipour e Foster²⁹, por exemplo, aplicaram uma formulação de elementos finitos baseados no Método da Forças (*Forced-Based Formulation*) para captar o Efeito Catenária no caso de CP de estruturas de concreto.

Yi *et al*¹² realizaram um estudo experimental em um pórtico plano de quatro vãos e três andares, ver Figura 7, e descrevem, entre outras coisas, o exato momento em que o Efeito Catenária inicia e qual o seu impacto na estrutura como um todo.

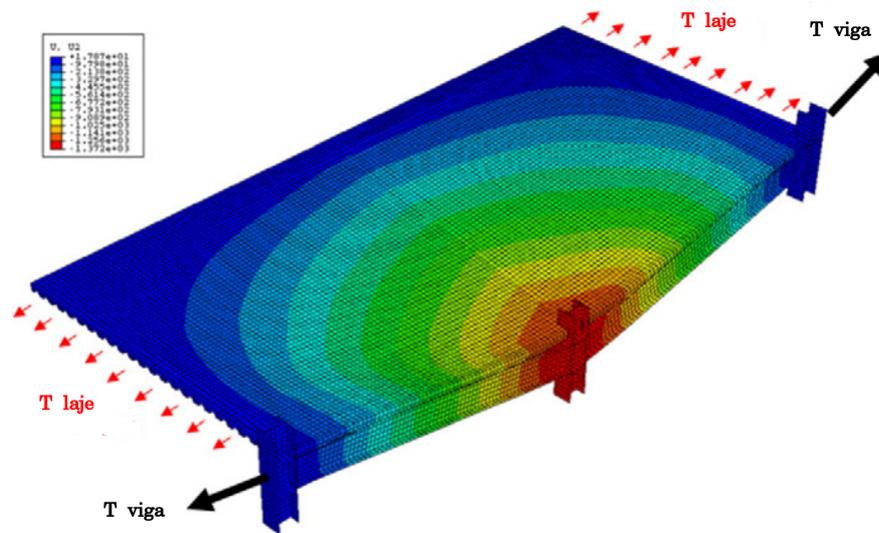
Figura 7 – Ensaio de um pórtico de quatro vãos e três andares



Fonte: Yi *et al* (2008)¹².

O *Efeito de Membrana* ocorre quando os esforços axiais da laje não podem ser mais desprezados passando a contribuir, assim como o efeito catenária, para a resistência da estrutura ao CP^{31,32}. Na Figura 8, pode-se visualizar uma ilustração de como isso ocorre.

Figura 8 – Efeito Membrana



Fonte: Kim *et al* (2015)³¹.

Nesse sentido, Kim *et al*³¹ apresentam um modelo analítico do efeito da laje considerando a perda de um dos pilares. Inicialmente uma relação tensão-deformação simples é proposta a partir de uma análise de elementos finitos. Em seguida, adicionando a parcela de energia absorvida pela laje à equação de equilíbrio energética, propõe uma metodologia de análise não linear estática de colapso progressivo baseada no equilíbrio energético.

Em outro trabalho teórico importante, Keyvani *et al*³³ consideram o efeito das forças de compressão de membrana e afirmam que sua consideração melhora a resistência a falha progressiva da estrutura e que sua desconsideração subestima a resistência da mesma.

Há também diversos estudos experimentais como o já citado de Yi *et al*³² e Kokot *et al*³⁴. Neste último, estudou-se extensivamente a interação da laje com os elementos do pórtico, ambos de concreto armado, através de dados obtidos em ensaios e análises numéricas. Ao final, utilizando-se do Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC) e considerando efeitos quasi-estáticos e dinâmicos, além da consideração do local do elemento colapsado, afirmam que o fator dinâmico igual a 2 é demasiado conservativo (valores mais exatos obtidos estão entre 1,72 e 1,87) e que a desconsideração do efeito dinâmico pode ser crítica para a prevenção do CP.

Além dos trabalhos apresentados, diversos estudos na literatura técnica buscam uma melhor compreensão da redistribuição dos esforços nas estruturas, sendo a maioria dos trabalhos experimentais relacionados à estruturas metálicas^{35–39}.

2.2.1.1 Método da força de Conexão (*Tie Force Method*)

O Método da Força de Conexão (*Tie Force Method*) foi o primeiro método utilizado para prevenir o CP depois do incidente com o *Ronan Point*. Inicialmente foi adotado pelo Código Normativo Britânico (*British Code*) e posteriormente pelo Eurocode e outros códigos internacionais^{9,40}.

Este método consiste em conectar mecanicamente elementos estruturais (vigas-pilares) de maneira que estes possam desenvolver caminhos alternativos de carga em caso de colapso de um de seus membros. A principal diferença deste para os demais métodos é o fato dessas conexões serem dimensionadas através de correlações presentes nos textos normativos referentes. Isto é, sem a necessidade de análises estruturais mais complexas. Para o concreto armado, isto é feito através da adição de armaduras extras nas ligações de maneira a oferecer continuidade à estrutura como um todo. Vale salientar que, as armaduras de ligação são diferentes das de reforço, típicas deste tipo de material, pois são obtidas por metodologias diferentes e tem funcionalidades distintas.

De forma semelhante ao Código Britânico (BS6399⁴¹ e BS8110⁴²), o Eurocode 2⁴³ classifica estas ligações em quatro classes de acordo com a sua localização na estrutura, conforme é listado abaixo e ilustrado na Figura 9.

- Ligação interna;
- Ligação periférica;
- Ligação horizontal de colunas ou paredes estruturais;
- Ligação vertical.

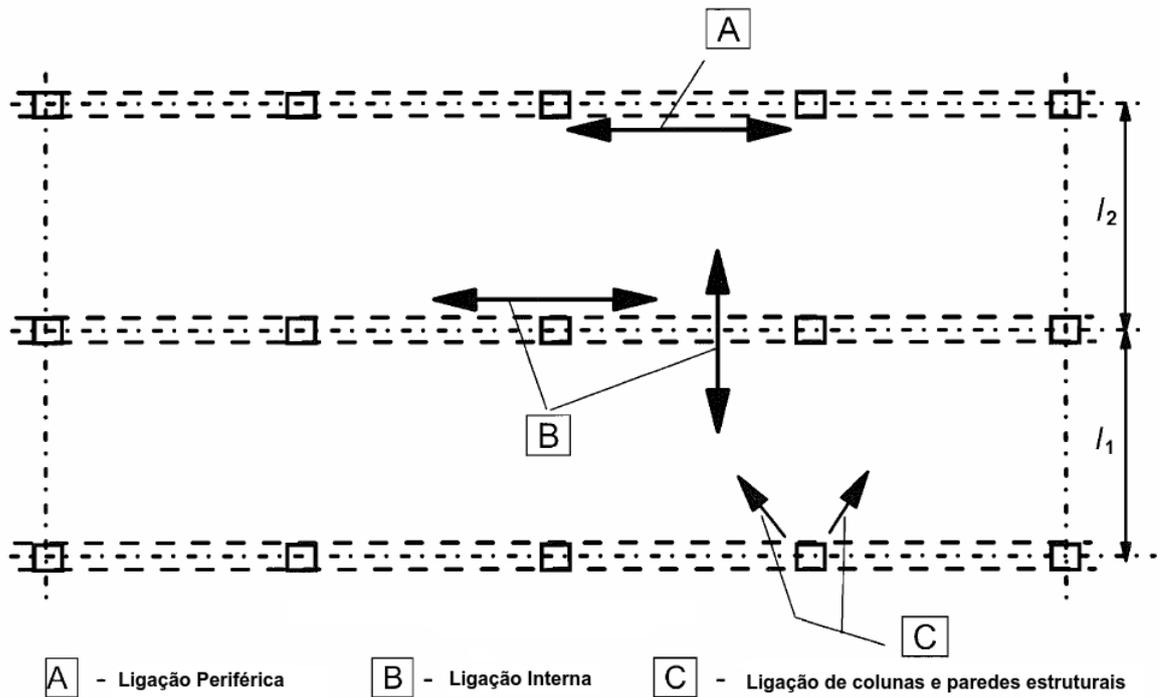
Segundo esse código, as ligações internas devem ser colocadas em cada andar e no teto e devem ser colocadas em direções de aproximadamente noventa graus, conforme ilustra a Figura 9. Em cada direção, a armadura deve ser capaz de resistir a uma força de tração ($F_{tie,int}$) no valor de 20kN por comprimento de vão (20kN/m). No entanto, estes valores podem mudar de acordo com os anexos nacionais (*National Annexes*) de cada país.

Ligações periféricas também devem ser utilizadas em cada andar e no teto, mas com um comprimento de 1,2 m depois da ligação. Esta deve resistir a uma força $F_{tie,per}$ calculada por:

$$F_{tie,per} = l_i \cdot q_1 \geq Q_2 \quad (2)$$

onde $F_{tie,per}$ é a força de ligação entre os elementos periféricos, l_i é o comprimento do vão, q_1 e Q_2 são 10kN/m e 70kN, respectivamente. No entanto, outros valores podem ser obtidos de acordo com os anexos nacionais (*National Annexes*) de cada país. Vale ressaltar que as ligações periféricas devem ser conectadas com as internas de maneira a garantir a transmissão do esforço.

Figura 9 – Classificação de ligações segundo o Eurocode.



Fonte: Eurocode⁴³.

Já nas ligações horizontais de pilares e/ou paredes estruturais, todos estes elementos do perímetro devem ser ligados horizontalmente em cada andar e no teto, sendo que as dos cantos devem ser ligadas em duas direções utilizando as armaduras das ligações periféricas.

As ligações verticais assemelham-se à funcionalidade do Método da Resistência local específica, isto é, busca-se evitar que o dano seja transferido dos pilares para os elementos a estes ligados. Devem ser utilizadas para edificações acima de 5 andares e cada uma deve resistir uma força de 20kN por metro de fachada.

Li⁴⁰ diz que no código britânico^{41,42}, as ligações também seguem essa classificação, mas são calculadas de maneira diferentes. Inicialmente calcula-se a força de ligação (F_t) para cada uma e depois esse valor é multiplicado por um coeficiente específico. Há duas maneiras diferentes de obter F_t . A primeira é empírica e definida por:

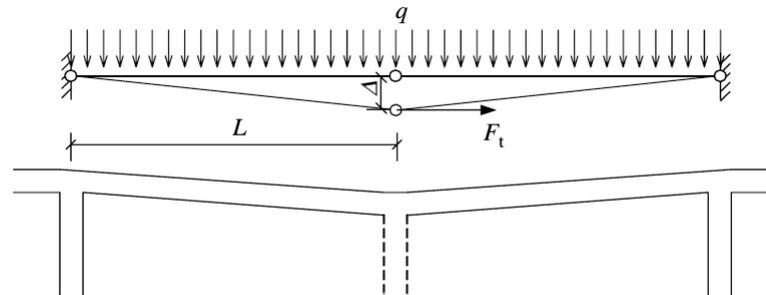
$$F_t = 4n_0 + 20kN \quad (3)$$

com n_0 sendo número de andares.

A segunda opção é calcular de acordo com o esquema da Figura 10 e definida pela expressão:

$$F_t = \frac{q l^2}{2\Delta} \quad (4)$$

Figura 10 – Diagrama para cálculo da resistência de ligação (F_t) segundo o Cógido Britanico^{41?}



Fonte: Li⁴⁰

onde q é a carga distribuída, Δ é a deflexão e L é o vão entre dois pilares. Utilizando $q = 5\text{kN}/\text{m}$, $\Delta = L/5$ e $L = 5\text{m}$, obtêm-se $F_t = 60\text{kN}/\text{m}$, valor normalmente utilizado.

No entanto, o mesmo autor afirma que essas recomendações não são seguras e propõe uma reformulação através da segunda metodologia para calcular F_t incluindo o efeito de distribuição espacial, efeito de distribuição interna de deformação e efeito.

2.2.2 Métodos Diretos de Projeto

Nos métodos diretos de projeto, as ligações da estrutura são definidas a partir de análise mais complexas da estrutura como um todo. Geralmente, divide-se em dois métodos: 1) **Resistência Local Específica** (*Specific Local Resistance*) e 2) **Método do Caminho Alternativo de Carga** (*Alternative Load Path*).

2.2.2.1 Método da Resistência Local Específica

O foco desse método são os pilares da estrutura. Considera-se que houve um evento capaz de transmitir cargas anormais à estrutura e que alguns destes elementos terão que suportar tais cargas sem provocar o surgimento de um dano local ($P(LD|H)$).

Este método é caracterizado por ser uma abordagem contra ameaças específicas (explosões, impactos e incêndios) e pode dar-se de duas maneiras: cada membro é localmente enrijecido e detalhado para resistir as tais cargas ou apenas alguns elementos-chave são dimensionados de maneira a não sofrer danos significativos e sem transmiti-los aos elementos ligados a este¹.

O DoD³ afirma que o Método da Resistência Local Específica (MRLE) também pode ser utilizado como um método indireto de projeto. Para isto, este faz prescrições de forma que o pilar, ou parede estrutural, não atinja sua capacidade última de cisalhamento antes da de flexão. Dessa forma:

$$\phi R_n \geq R_u \quad (5)$$

onde ϕ é fator de redução da resistência; R_n é a resistência nominal, nesse caso a capacidade última de flexão; R_u é a resistência requerida, nesse caso a de cisalhamento e ϕR_n é a resistência de projeto. Vale salientar que no caso do MRLE, $\phi = 1$.

2.2.2.2 Método do Caminho Alternativo de Carga

Nesta abordagem, considera-se que o pilar, ou parede estrutural, não é suficiente para conter as cargas extras advindas de um evento crítico e entra em colapso. Desta forma, deve-se dispor caminhos alternativos de redistribuição de esforços na estrutura para que o dano inicial não seja propagado aos demais membros. Assim, o principal objetivo dessa método é diminuir $P(CP|LD)$.

Geralmente, esta metodologia é a que fornece o maior nível de detalhamento e acurácia e que exige mais esforço do projetista, pois análises mais complexas precisam ser realizadas. Três tipos de estudos podem ser feitos: análise linear estática, análise não linear estática e Análise Não Linear Dinâmica. Vale salientar que, em se tratando do primeiro trabalho, utilizou-se apenas a análise estática linear e não linear.

As principais normas técnicas que consideram o Método do Caminho Alternativo de Carga (MCAC) são o GSA² e DoD³. No entanto, também está presente no ASCE 7-10¹⁸ e NIST 7396¹.

De maneira geral, esta metodologia é muito parecida em ambos nos códigos normativos GSA e DoD e há bons níveis de detalhamento e informação. No entanto, apesar de contemplar os três casos, o GSA só fornece um passo a passo mais detalhado da análise linear estática, enquanto o DoD, fornece um nível de descrição mais completo de todos os casos.

O procedimento geral do método consiste em analisar a estrutura frente a perda de um ou mais pilares. Nesse sentido, há três aspectos importantes a serem verificados, a saber: a localização das colunas a ser retiradas, as cargas a serem aplicadas e o procedimento geral da análise.

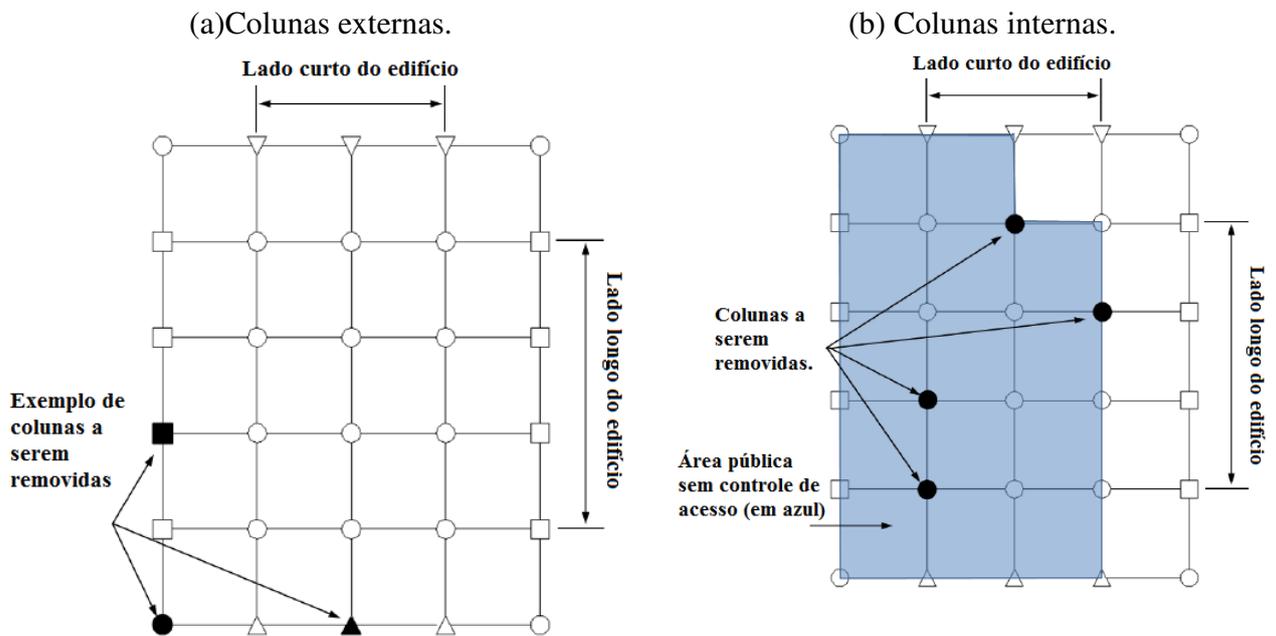
No GSA², conforme descrito Figura 5, a classificação das colunas as serem removidas varia com o FSL (*Facility Security Level*), que variam de I a V. Para FSL III e IV, os elementos verticais externos do primeiro andar acima do solo e todos os pilares de andares abaixo do solo, como estacionamentos, devem ser retirados. Já para FSL V, colunas externas e internas de cada andar devem ser removidos. Algo semelhante é utilizado no DoD, mas com um índice de usabilidade da edificação OC (*Occupation Category*) que varia de I a IV.

Não necessariamente, todos os pilares devem ser removidos, pois é comum haver indicações dos elementos mais críticos. No entanto, estas normas deixam claro que a interpretação do responsável tem participação fundamental. Por exemplo, para as colunas externas, recomenda-se remover os pilares externos perto da metade do lado curto do edifício, perto da metade do lado longo do edifício, nos cantos e adjacências ao canto do edifício, conforme mostrado na Figura 11 (a). No entanto, também devem ser removida pilares considerados críticos

conforme o julgamento do responsável técnico.

Já para os pilares internos, devem-se remover colunas internas perto da metade do lado curto, perto da metade do lado longo e nos cantos da região sem controle de acesso, conforme ilustra a Figura 11 (b).

Figura 11 – Locação de retirada de colunas segundo o GSA.



fonte: GSA².

O GSA restringe a Análise Linear estática conforme o número de andares, no máximo dez, e por um coeficiente chamado DCR (*Demand-Capacity Ratio*):

$$DCR = \frac{Q_{UDlim}}{Q_{CE}} \quad (6)$$

onde, Q_{UDlim} é a resultante das ações internas e Q_{CE} é a resistência esperada do elementos. Este é representado pela razão a resultante de esforços internos e a resistência da peça e, nesse caso, deve ser menor do que 2 para todos os componentes.

Para a análise linear estática, deve-se retirar previamente a coluna escolhida, aplicar as cargas:

$$G_{LD} = \Omega_{LD}[1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (7)$$

para os vão imediatamente adjacentes ao pilar perdido e as cargas:

$$G = 1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S) \quad (8)$$

nos demais vãos, onde, G_{LD} é a carga a ser aplicada nos vão imediatamente ao pilar perdido,

G é a carga a ser aplicada nos demais vãos, Ω_{LD} é um fator de incremento de carga definido pela Tabela 2, m_{LIF} é um coeficiente de segurança que depende de cada material, D é a Carga Permanente (*Dead Load*), L é a Carga Acidental (*Live Load*).

Tabela 2 – Fator de incremento de carga para Análise Linear segundo o GSA.

Material	Tipo de Estrutura	Ω_{LD} , controle de deformação	Ω_{LD} , controle de carga
Aço	Pórtico	$0.9m_{LIF} + 1.1$	2.0
Concreto Armado	Pórtico	$1.2m_{LIF} + 0.80$	2.0
Concreto Armado	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Alvenaria	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Madeira	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0
Aço formado a frio	Parede estrutural	$2.0m_{LIF}$	2.0

Fonte: GSA².

Para os casos em que uma análise linear estática não é suficiente, pode-se utilizar uma análise não linear estática. Neste caso, os carregamentos devem seguir um raciocínio semelhante ao anterior: Aplica-se a carga da Equação:

$$G_N = \Omega_N [1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (9)$$

para os vãos imediatamente adjacentes ao elemento retirado e a carga da Equação:

$$G = 1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S) \quad (10)$$

nos demais vãos, onde, G_N é a carga a ser aplicada nos vãos imediatamente ao pilar perdido, G é a carga a ser aplicada nos demais vãos, Ω_N é um coeficiente de majoração Dinâmica da carga definido pela Tabela 3, θ_{pra} é o ângulo de rotação plástica segundo critério de segurança e θ_y é a rotação de escoamento efetiva do elemento conectado ao elemento colapsado. D é a Carga Permanente (*Dead Load*) e L é a Carga Acidental (*Live Load*).

Tabela 3 – Fator de incremento de carga para Análise não Linear segundo o GSA.

Material	Tipo de Estrutura	G_N
Aço	Pórtico	$1.08 + 0.76(\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0.83)$
Concreto Armado	Pórtico	$1.04 + 0.45(\frac{\theta_{pra}}{\theta_y} + 0.48)$
Concreto Armado	Parede estrutural	2.0
Alvenaria	Parede estrutural	2.0
Madeira	Parede estrutural	2.0
Aço formado a frio	Parede estrutural	2.0

Fonte: GSA².

É importante destacar que ambos os códigos recomendam que sejam feitos no mínimo dez incrementos de carga até atingir a carga total.

Já em uma Análise Não Linear Dinâmica, toda a estrutura deve ser carregada com a mesma carga definida pela Equação 11:

$$G_{ND} = [1.2 D + (0,5 L \text{ ou } 0,2 S)] \quad (11)$$

onde, G_N é a carga a ser aplicada nos vãos imediatamente ao pilar perdido, D é a Carga Permanente (*Dead Load*), L é a Carga Acidental (*Live Load*).

Inicialmente, nenhuma coluna deve ser retirada do modelo. Deve-se aplicar a referida carga, equação (11) até a estrutura encontrar o equilíbrio. Logo após, deve-se retirar o pilar escolhido e realizar a Análise Não Linear Dinâmica até encontrar o máximo deslocamento ou um ciclo de movimento vertical ocorrer no local da coluna ou parede retirada, o que for maior.

Vale salientar que todas essas análises citadas contêm vantagens e desvantagens e, dessa forma, cabe ao engenheiro responsável julgar qual será a mais adequada para o caso em estudo.

3 ANÁLISE NÃO LINEAR

No que diz respeito à análise de estruturas de concreto armado via Método dos Elementos Finitos, dependendo do que pretende ser estudado, podem ser adotadas duas metodologias diferentes, uma local e outra global.

A local é utilizada quando se pretende representar de forma detalhada o comportamento da estrutura, incluindo aspectos como padrão de fissuração, efeito do confinamento, plastificação de regiões comprimidas, etc. Para isso utilizam-se normalmente elementos finitos planos ou tridimensionais. Geralmente, esta abordagem é utilizada para estudar em detalhe o comportamento de algum elemento estrutural específico, como uma viga, coluna ou ligação. Estes muitas vezes também ensaiado também em laboratório. Esta abordagem permite a obtenção de resultados bastante precisos, mas normalmente demanda considerável custo computacional.

No entanto, no projeto de estruturas, é necessária a análise do comportamento global de um edifício formado por um número elevado de elementos estruturais. Neste caso, a adoção de elementos finitos planos ou sólidos resultaria em um custo computacional proibitivo para situações práticas. Dessa forma, adotam-se elementos unidimensionais de viga ou pórtico. Essa abordagem pode ser definida como uma metodologia global de análise que, ao invés de observar um elemento isolado, atenta-se para o trabalho conjunto da estrutura como um todo.

Quando a estrutura é levada ao extremo de sua capacidade, como ocorre no Colapso Progressivo, a consideração da não linearidade geométrica e física mostra-se fundamental para a precisão da análise. Nesse caso, para estudar o efeito desse fenômeno em pórticos de concreto armado, deve-se considerar o comportamento global através da utilização de elementos de pórtico (planos ou espaciais) que permitam representar grandes deslocamentos e que considerem modelos constitutivos que permitam representar de forma adequada os principais aspectos físicos do comportamento dos materiais utilizados.

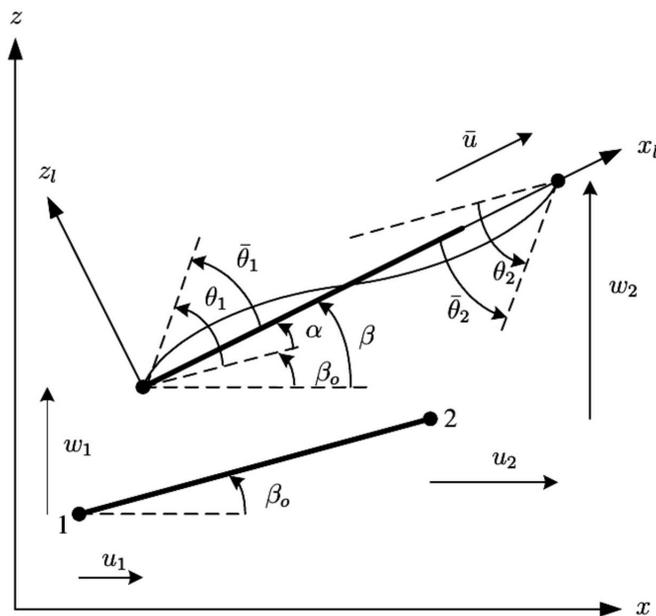
No que diz respeito à não linearidade geométrica, os elementos devem ser capazes de representar não só o efeito dos grandes deslocamentos e rotações que ocorrem próximo à ruína da estrutura, como o efeito da força normal sobre a rigidez dos elementos estruturais. Esse segundo aspecto é fundamental na simulação do CP devido a necessidade de representar de forma adequada o Efeito Catenária.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizado um elemento finito de pórtico plano baseado na teoria de Euler-Bernoulli. Este considera a não linearidade geométrica através da formulação co-rotacional e já estava presente no programa utilizado, FAST. No entanto, é importante destacar que os recursos de não linearidade física disponíveis no FAST eram limitados a modelos elásticos linear e não lineares^{44,45}. Dessa maneira, a principal contribuição deste trabalho concentra-se na implementação de modelos constitutivos baseados na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo para o aço e concreto, bem como sua utilização para o estudo do CP.

3.1 Formulação Co-rotacional

A não linearidade geométrica foi considerada através da formulação co-rotacional^{44,46,47}. Esta descrição cinemática visa separar de forma explícita os deslocamentos de corpo rígido das deformações sofridas pelo elemento, através da utilização de um sistema de coordenadas auxiliar que acompanha o elemento, como descrito na Figura 12.

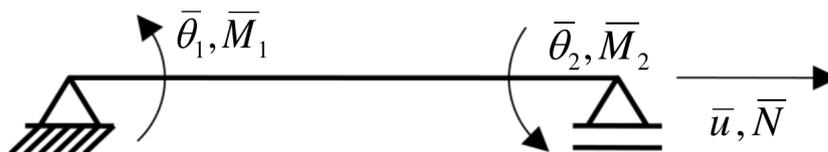
Figura 12 – Descrição cinemática co-rotacional.



Fonte: Battini⁴⁷

É importante notar que existem apenas três modos de deformação para o elemento de pórtico plano, conforme ilustrado na Figura 13, sendo um modo associado à deformação axial do elemento (\bar{u}) e dois associados às deformações de flexão ($\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$).

Figura 13 – Modos de deformação local para o elemento de pórtico plano



Fonte: Neto⁴⁴

Com base nos parâmetros da Figura 13, pode-se definir os deslocamentos devidos

às deformações do elemento como:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= L_n - L_o \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \alpha \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \alpha\end{aligned}\tag{12}$$

onde L_n e L_o são os comprimentos final e inicial, respectivamente, e θ_1 e θ_2 são as rotações globais dos nós 1 e 2, respectivamente. Por outro lado, \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são o deslocamento axial e as rotações dos nós no sistema local, respectivamente. Por fim, α representa a rotação de corpo rígido do elemento, que é definida como:

$$\alpha = \beta - \beta_o\tag{13}$$

onde β e β_o são os ângulos do elemento no sistema global, conforme descrito na Figura 12.

Os comprimentos inicial e deformado do elemento podem ser calculados como:

$$\begin{aligned}L_o &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ L_n &= \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}\end{aligned}\tag{14}$$

sendo:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) + (u_2 - u_1) \\ \Delta y' &= y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1) + (v_2 - v_1)\end{aligned}\tag{15}$$

Um passo fundamental da formulação co-rotacional é a separação das rotações totais na parcela de corpo rígido e na parcela associada às deformações. Partindo-se da Equação (13), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin(\beta - \beta_o) = s.c_o - c.s_o \\ \cos \alpha &= \cos(\beta - \beta_o) = c.c_o + s.s_o\end{aligned}\tag{16}$$

em que os senos e cossenos dos ângulos de inclinação dos elementos são calculados como:

$$\begin{aligned}c_o &= \cos \beta_o = \Delta x / L_o \\ s_o &= \sin \beta_o = \Delta y / L_o \\ c &= \cos \beta = \Delta x' / L_n \\ s &= \sin \beta = \Delta y' / L_n\end{aligned}\tag{17}$$

É importante notar que a Equação (16) é capaz de determinar a rotação rígida da barra desde que α esteja dentro do intervalo $[-\pi, \pi]$. Contudo, esta expressão pode ser facil-

mente estendida para rotação de qualquer magnitude utilizando uma forma incremental^{44,45}.

A análise da estrutura completa é realizada no sistema global, assim é necessário que se calcule o vetor de forças internas e a matriz de rigidez do elemento e se faça a transformação para o sistema global. O vetor de deslocamentos no sistema local é dado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

Enquanto o vetor de deslocamentos no sistema global é dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

Utilizando a Equação (12), pode-se escrever os deslocamentos virtuais no sistema local como:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta \theta_1 - \alpha \\ \delta \theta_2 - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta L_n \\ \delta \theta_1 - \delta \beta \\ \delta \theta_2 - \delta \beta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Utilizando as Equações (14) e (15) e fazendo uma série de manipulações pode-se escrever:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T} \delta \mathbf{u} \quad (21)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -\frac{s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 1 & \frac{s}{L_n} & -\frac{c}{L_n} & 0 \\ -\frac{s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 1 & \frac{s}{L_n} & -\frac{c}{L_n} & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças internas no sistema local é definido pelos esforços conjugados aos deslocamentos definidos na Equação (12), sendo uma força axial e dois momentos nodais:

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

como o trabalho é um escalar, o trabalho virtual interno é indiferente para qualquer sistema, assim:

$$\delta U = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (23)$$

Substituindo a Equação (21) na expressão acima, obtém-se uma equação capaz de transformar

o vetor de forças internas do elemento no sistema local para o sistema global:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} \quad (24)$$

A solução das equações não lineares de equilíbrio é realizada normalmente utilizando o Método de Newton-Raphson⁴⁶, que requer a utilização da matriz de rigidez tangente \mathbf{k}_T . Esta matriz relaciona o incremento do vetor de forças internas com o incremento de deslocamentos:

$$d\mathbf{g} = \mathbf{K}_T d\mathbf{u} \quad (25)$$

Portanto, a determinação da matriz de rigidez no sistema global pode ser realizada diferenciando a Equação (24):

$$d\mathbf{g} = \mathbf{T}^T d\bar{\mathbf{g}} + d\mathbf{T}^T \mathbf{g} = \mathbf{K}_E d\mathbf{u} + \mathbf{K}_G d\mathbf{u} \quad (26)$$

onde \mathbf{K}_E corresponde parcela da matriz de rigidez dependente do material e \mathbf{K}_G à matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais. Pode-se calcular a matriz de rigidez tangente como:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G \quad (27)$$

A matriz de rigidez tangente do sistema local $\bar{\mathbf{K}}_t$ relaciona o incremento de deslocamentos e forças neste sistema:

$$d\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{K}}_t d\bar{\mathbf{u}} \quad (28)$$

Esta matriz pode incluir tanto os efeitos da não linearidade geométrica quanto física. Utilizando as Equações(21) e (26), obtém-se a expressão da matriz \mathbf{K}_e no sistema global, que será simétrica sempre que a matriz de rigidez tangente local for simétrica:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_t \mathbf{T} \quad (29)$$

A matriz de rigidez geométrica vem da segunda parcela da Equação(26) correspondente à variação da matriz de transformação:

$$\mathbf{K}_G d\mathbf{u} = d\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}} = \bar{N} dt_1 + \bar{M}_1 dt_2 + \bar{M}_2 dt_3 \quad (30)$$

onde \mathbf{t}_k indica a coluna k da matriz \mathbf{T}^T . Derivando a Equação (30) em relação aos deslocamentos, pode-se escrever a matriz de rigidez geométrica no sistema global como:

$$\mathbf{K}_g = \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L_n} + (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \frac{1}{L_n^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T) \quad (31)$$

onde os vetores \mathbf{r} e \mathbf{z} são definidos como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} s & -c & 0 & -s & c & 0 \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

3.1.1 Elemento local

O elemento utilizado neste trabalho é baseado na Teoria Clássica de Vigas (Euler-Bernoulli). Esta teoria propõe que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga quando esta se deforma. Em consequência, o efeito do cisalhamento é desprezado.

Utilizando esta hipótese pode-se mostrar que a deformação na direção do eixo de barra (ϵ_x) pode ser escrita como:

$$\epsilon_x = \epsilon_m - y\kappa \quad (34)$$

onde ϵ_m é a deformação no centroide da seção transversal (deformação de membrana), y é a distância vertical do ponto considerado até o centroide da seção e

$$\kappa = v_{,xx} \quad (35)$$

é a curvatura da viga.

O elemento co-rotacional utilizado neste trabalho inclui a não linearidade geométrica tanto na transformação local-global discutida anteriormente como na definição da deformação de membrana. Assim, o efeito dos deslocamentos transversais no sistema local são considerados através da deformação de Green-Lagrange:

$$\epsilon_m = u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 \quad (36)$$

Nota-se que o termo $1/2u_{,x}^2$ da deformação de Green-Lagrange foi desprezado porque os deslocamentos axiais (u) são pequenos em relação aos transversais (v).

É importante ressaltar que a expressão da curvatura é linear porque o elemento considera que as rotações no sistema local são sempre pequenas. Por outro lado, a deformação de membrana é não linear, incorporando o efeito dos deslocamentos transversais por meio do uso da deformação de Green-Lagrange. Alternativamente, poderia ser considerada apenas a parcela linear da deformação de membrana, pois os deslocamentos transversal no sistema local são pequenos⁴⁶. Contudo, o uso da deformação Green-Lagrange no sistema local torna o elemento

mais preciso, permitindo reduzir a discretização da estrutura.

Devido à ordem das derivadas que aparecem na Equação (40), o deslocamento u e v requerem funções com continuidade C^0 e C^1 , respectivamente⁴⁸. Portanto, o deslocamento axial será interpolado de forma linear, enquanto para o deslocamento transversal será utilizado um polinômio cúbico.

$$u = L_2 \bar{u} \quad e \quad v = H_2 \bar{\theta}_1 + H_4 \bar{\theta}_2 \quad (37)$$

onde L_2 é um polinômio de Lagrange linear e H_2 e H_4 são polinômios de Hermite. As variáveis \bar{u} , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são os deslocamentos e rotações nodais no sistema, respectivamente, conforme apresentado nas Figuras 12 e 13.

Considerando intervalo $0 \leq x \leq L$, a função de interpolação dos deslocamentos axiais pode ser definida como

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (38)$$

Enquanto polinômios de Hermite podem ser definidos como⁴⁸:

$$H_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad e \quad H_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (39)$$

Nota-se que as interpolações dos deslocamentos axiais e transversais são feitas utilizando polinômios de graus diferentes, o que pode causar o travamento em membrana devido ao desbalanceamento dos termos transversais e axiais. Assim, Crisfield⁴⁶ recomenda a utilização de deformação média:

$$\epsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \left(u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \right) dx \quad (40)$$

Dessa forma, utilizando a Equação (37) e integrando as expressões resultantes, as expressões para calcular ϵ_m e κ ficam:

$$\epsilon_m = \frac{\bar{u}}{L} + \frac{1}{30} (2\bar{\theta}_1^2 - \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 + 2\bar{\theta}_2^2) \quad e \quad \kappa = v_{,xx}. \quad (41)$$

A deformação de membrana pode ser escrita na forma matricial como:

$$\epsilon_m = \mathbf{B}_m \bar{\mathbf{u}} \quad (42)$$

onde

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{m0} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{mL} \quad (43)$$

com

$$\mathbf{B}_{m0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

e

$$\mathbf{B}_{mL} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2}{30} & \frac{4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1}{30} \end{bmatrix} \quad (45)$$

A determinação do vetor de forças internas requer as deformações virtuais. A deformação de membrana virtual pode ser obtida a partir da Equação (41):

$$\delta\epsilon_m = \frac{\delta\bar{u}}{L} + \frac{1}{30}[(4\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)\delta\bar{\theta}_1 + (4\bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1)\delta\bar{\theta}_2] \quad (46)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma matricial como:

$$\delta\epsilon_m = \bar{\mathbf{B}}_m \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (47)$$

onde

$$\bar{\mathbf{B}}_m = \mathbf{B}_{m0} + \mathbf{B}_{mL} \quad (48)$$

No caso da curvatura, tem-se:

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & H_{2,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Esta expressão pode ser escrita matricialmente como:

$$\epsilon = \mathbf{B}_b \bar{\mathbf{u}} \quad (50)$$

Substituindo as derivadas das funções de forma, pode-se escrever \mathbf{B}_b como:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L}\right) \end{bmatrix}$$

Juntando as parcelas de membrana e de flexão, as deformações virtuais podem ser escritas como:

$$\delta\epsilon = \begin{bmatrix} \delta\epsilon_m \\ \delta\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \delta\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}} \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (51)$$

Dessa forma, o vetor de forças internas pode ser escrito como:

$$\bar{\mathbf{g}} = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (52)$$

Na análise de estruturas reticuladas é mais cômodo trabalhar com esforços internos (resultante de tensões ou tensões generalizadas) do que com as tensões propriamente ditas:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ M &= \int_A (-y \sigma_x) dA \end{aligned} \quad (53)$$

onde σ_x é a tensão normal na direção do eixo da barra, A é a área da seção transversal, N é a força normal e M o momento fletor. Assim, pode-se definir o vetor de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$) como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (54)$$

No caso da teoria clássica de vigas pode-se escrever o trabalho virtual interno (δU) como:

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon_x \sigma_x dV = \int_0^L \int_A (\delta \epsilon_m - y \delta \kappa) \sigma_x dA dx = \int_0^L (N \delta \epsilon_m + M \delta \kappa) dx \quad (55)$$

Utilizando os vetores de tensões e deformações generalizadas tem-se:

$$\delta U = \int_0^L \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx \quad (56)$$

A formulação deste elemento inclui o cálculo das deformações ($\boldsymbol{\epsilon}$), forças internas ($\bar{\mathbf{g}}$) e matriz de rigidez tangente ($\bar{\mathbf{K}}_T$). Esta última pode ser calculada a partir das segundas da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{K}}_T = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{K}}_E + \bar{\mathbf{K}}_G \quad (57)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}_E$ é a matriz de rigidez material e $\bar{\mathbf{K}}_G$ é a matriz de rigidez geométrica. A primeira matriz pode ser escrita como⁴⁴:

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \mathbf{A} \int_0^L N dx \quad (58)$$

onde a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_m^T}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{30} & -\frac{1}{30} \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{4}{30} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Já a matriz de rigidez material $\bar{\mathbf{K}}_e$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{K}}_E = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} dx \quad (60)$$

Portanto, esta matriz pode ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}_E = \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}} dx \quad (61)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente que relaciona incrementos de tensões e deformações generalizadas:

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{EA} & \bar{ES} \\ \bar{ES} & \bar{EI} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Diferenciado as tensões generalizadas (N e M) em relação às deformações generalizadas (ε_m e κ) chega-se a:

$$\begin{aligned} \bar{EA} &= \int_A E_t dA \\ \bar{ES} &= -\int_A E_t y dA \\ \bar{EI} &= \int_A E_t y^2 dA \end{aligned} \quad (63)$$

onde E_t corresponde ao módulo tangente da curva tensão-deformação do material:

$$E_t = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \quad (64)$$

3.2 Integração Numérica

O cálculo dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente é realizado através das integração das tensões e módulo tangente na seção transversal da viga, conforme mostrado nas Equações (53) e (63), respectivamente. Estas integrais podem ser resolvidas analiticamente se o material apresenta comportamento elástico linear. Contudo, o problema é mais complexo quando são utilizados modelos constitutivos não lineares. Nestes casos, a integração na seção transversal requer a utilização de técnicas analíticas sofisticadas ou de métodos numéricos.

Além da integração na seção transversal, o cálculo do vetor de forças internas $\bar{\mathbf{g}}$, Equação (52), e da matriz de rigidez tangente, Equações (58) e (61), requer a integração ao

longo do comprimento do elemento. No caso de materiais elástico lineares, estas expressões podem ser integradas analiticamente⁴⁶. No entanto, quando a não linearidade física é considerada, é necessário recorrer à integração numérica.

A Integração Numérica ou Quadratura corresponde a aproximação de uma integral definida de uma função que, devido a sua complexidade, não pode ser obtida analiticamente. Como discutido anteriormente, a consideração da não linearidade física faz com que seja necessário o uso da integração numérica tanto na seção transversal quanto ao longo do comprimento do elemento.

Sabe-se do Cálculo Diferencial e Integral que dada uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, existe uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, ou seja, $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$. Dessa forma, a ideia básica da integração numérica é substituir $f(x)$, cujas características a impedem de ser integrada diretamente, por um polinômio que aproxime esta função em um intervalo $[a, b]$. Assim o problema pode ser reduzido a integração de polinômios, cuja solução é trivial.

Os pontos de integração e os pesos dependem da regra específica utilizada e da precisão necessária para a aproximação. Como exemplos, podem ser citar a Quadratura de Newton-Cotes e a Quadratura de Gauss⁴⁹. A principal diferença entre estas é que a Quadratura de Newton-Cotes usa pontos igualmente espaçados e somente os pesos são desconhecidos. Já na Quadratura de Gauss, os pontos não são igualmente espaçados e suas posições e, assim como os pesos, podem ser determinado de forma a obter uma maior precisão na integração.

3.2.1 Quadratura de Gauss

Na Quadratura de Gauss, o número de pontos de integração e seus respectivos pesos dependem do grau do polinômio $f(x)$ a ser integrado. De forma a facilitar e tornar a aplicação desta mais geral, pode-se transformar um dado intervalo de integração $[a, b]$ em intervalo padrão $[-1, 1]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \quad (65)$$

onde

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)a + \frac{1}{2}(1 + \xi)b \quad \text{e} \quad \phi(\xi) = f(x(\xi)) J \quad (66)$$

Neste equação, o termo J representa o Jacobiano da transformação entre as coordenadas cartesianas e paramétricas:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{b - a}{2} \quad (67)$$

A partir disso, podem-se obter^{48,50} os pesos W e as coordenadas paramétricas ξ dos pontos de integração, que são os pontos onde a função ϕ será calculada (pontos de amostragem). Dessa forma, a aproximação da integral I é dado por:

$$I = W_1 \phi(\xi_1) + W_2 \phi(\xi_2) + \dots + W_n \phi(\xi_n) = \sum_{i=1}^n \phi_i W_i \quad (68)$$

Os pontos e pesos de Gauss são determinados de forma que com n pontos seja possível integrar exatamente um polinômios de graus $p = 2n - 1$. A Tabela 4 mostra as coordenadas e pesos de Gauss até 4 pontos, tabelas mais completas podem ser encontradas na literatura.

Tabela 4 – Pontos de Gauss.

Ordem (n)	Pontos de Integração $\phi(\xi_i)$	Peso W_i
1	0	2
2	± 0.577350269189626	1
3	± 0.774596669241483 0	$\pm 0.555555555555555 = \pm \frac{5}{9}$ $0.888888888888888 = \frac{8}{9}$
4	± 0.861136311594053 ± 0.339981043584856	$\pm 0.347854845137454 = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{1.2}}$ $\pm 0.652145154862546 = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{1.2}}$

Fonte: Cook *et al*⁴⁸.

Vale salientar que a Quadratura de Gauss não é exata para funções não polinomiais. Contudo, quanto mais pontos se utiliza, menor o erro na integração. De forma geral, a convergência é muito rápida no casos de funções suaves, como é o caso das funções continuamente diferenciáveis.

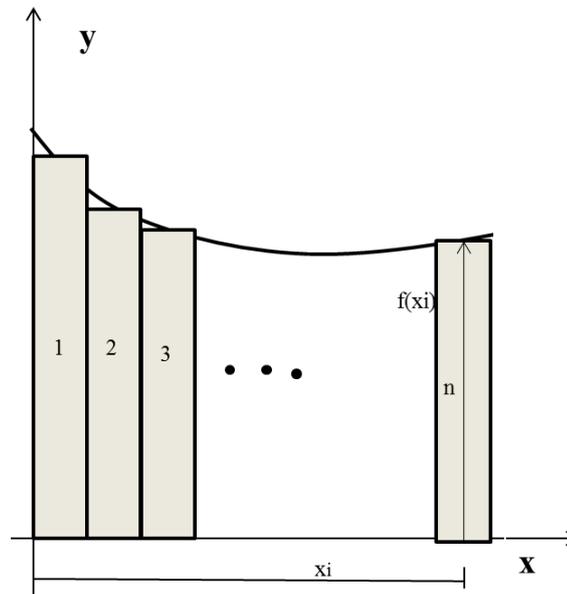
Devido a sua simplicidade de utilização e elevada precisão numérica, a Quadratura de Gauss é o método padrão para integração da matriz de rigidez e do vetor de forma de elementos finitos^{48,49}. Além de elementos de barra, ela pode ser utilizada em elementos planos e tridimensionais.

No caso de elementos de viga com material elástico linear, o polinômio de maior grau a ser integrado no cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente é cúbico. Portanto, a integração exata requer apenas 2 pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento. No caso de materiais com comportamento não linear, a integração não é exata, mas o uso de 2 pontos de Gauss leva a resultados satisfatórios⁴⁵.

3.2.2 Método das Fatias

O Método das Fatias é uma opção mais simples para aproximação de uma integral do que a Quadratura de Gauss. Neste método, a área abaixo de uma curva dada pela função $f(x)$ é aproximada por retângulos com uma espessura constante e e altura igual ao valor desta função na coordenada central x_i de cada retângulo, conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Aproximação da integral de $f(x)$ pelo Método das Fatias



Fonte: Próprio autor

Dessa forma, a aproximação da integral I pelo Método das Fatias fica:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \Delta x \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (69)$$

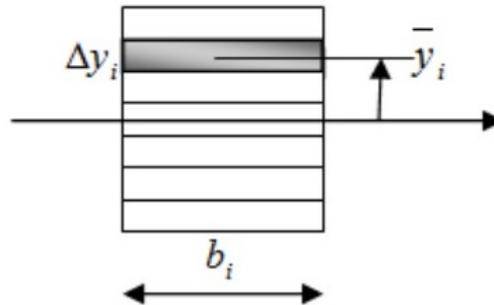
onde n é o número de fatias, $\Delta x = (b - a)/n$ é a espessura de cada fatia e as coordenadas dos pontos de integração são dadas por:

$$x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x \quad (70)$$

Verifica-se que a precisão do método depende do número de fatias adotado. Como a função é considerada constante em cada fatia, a convergência para o caso de funções suaves é mais lenta que a da Quadratura de Gauss.

Contudo, na análise não linear física utilizando elementos de viga, as deformações variam suavemente na seção transversal, mas o mesmo não ocorre com as tensões, principalmente no caso de materiais com comportamento inelástico, como é o caso dos modelos de elastoplásticos e de dano contínuo. Assim, o Método das Fatias tem sido largamente utilizado na análise fisicamente não linear para integração das tensões e módulo tangente na seção transversal dos elementos^{44,51-53}.

Figura 15 – Divisão de uma seção retangular pelo Método das Fatias



Fonte: Neto⁴⁴.

A Figura 15 ilustra a divisão de uma seção retangular para integração pelo Método das Fatias. A título de exemplo, utilizando este método, o momento fletor é calculado como:

$$M = \int_A -y \sigma dA = - \sum_{i=1}^n (y_i \sigma_i \Delta A_i) \quad (71)$$

onde ΔA_i é a área de cada fatia e $\sigma_i = \sigma(y_i)$, onde y_i é calculado de forma similar à Equação (70). No caso de seções retangulares, como a mostrada na Figura 15, a área de cada fatia é dada por $\Delta A_i = b \Delta y$. Uma das vantagens do Método das Fatias é a facilidade com que ele trata de seções transversais de geometria complexa, como T, I ou C. Neste caso, basta considerar a variação da largura b ao longo da altura da seção.

3.3 Modelos Constitutivos para Concreto Armado

Neste item serão apresentados os modelos constitutivos uniaxiais utilizados para a consideração da não linearidade física de estruturas de concreto armado. Os principais efeitos a serem modelados são a plastificação do aço, com e sem a consideração de encruamento (*Hardening*) e a fissuração e esmagamento do concreto, principalmente depois da tensão máxima onde há uma diminuição da tensão com o aumento da deformação (*softening*).

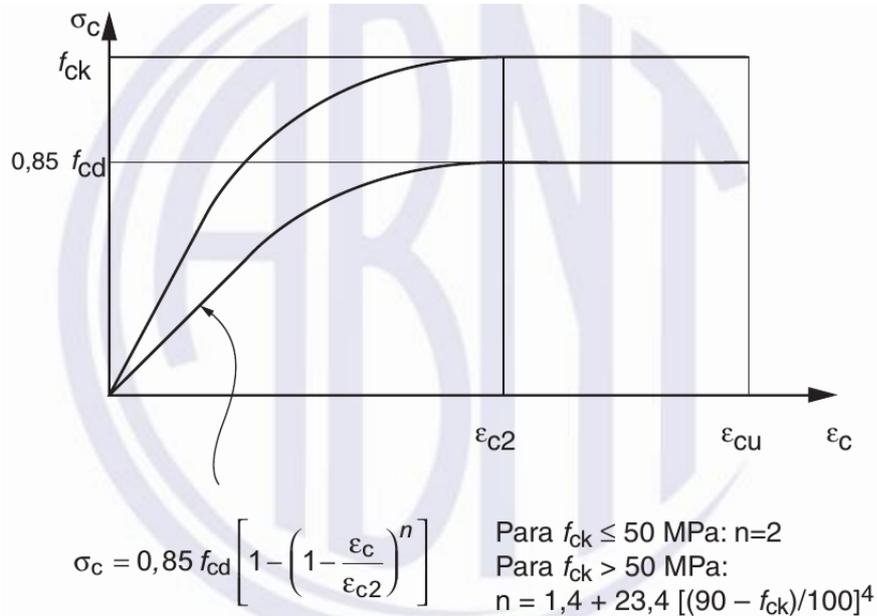
3.3.1 Modelos Constitutivos Elásticos

Modelos constitutivos elásticos são aqueles para os quais dado um corpo com uma determinada deformação provocada pela aplicação de uma tensão, ou vice-versa, esta pode ser totalmente recuperada com o descarregamento completo do corpo. Dessa forma, nenhuma deformação residual é acumulada. A relação tensão-deformação pode ser descrita por uma função linear ou não-linear.

Geralmente, a maioria das estruturas de concreto armado são dimensionadas utilizando este modelo constitutivo. Exemplos incluem o modelo adotado pela norma brasileira

NBR 6118:2014 - Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Armado²⁶. Na compressão, este consiste em um trecho inicial parabólico seguido por um comportamento linear após a carga de pico, conforme mostra a Figura 16.

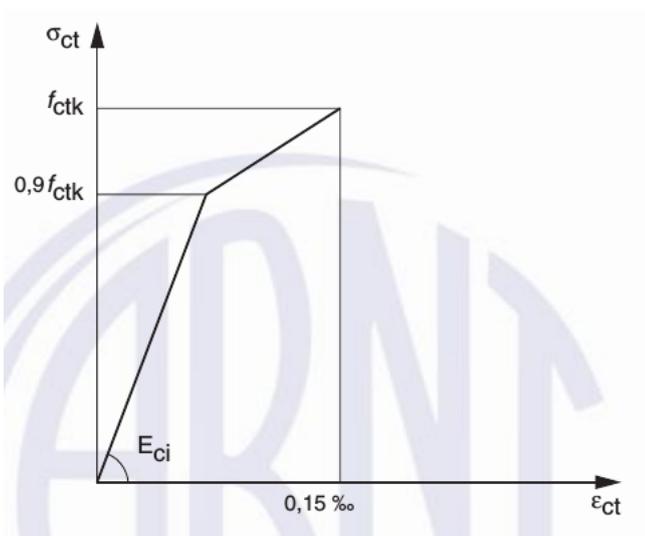
Figura 16 – Modelo constitutivo para o concreto na compressão segundo a NBR 6114:2014.



Fonte: NBR 6118:2014²⁶

Já para tração, a mesma considera que o concreto pode ser representado por um modelo bilinear, conforme pode ser visto na Figura 17.

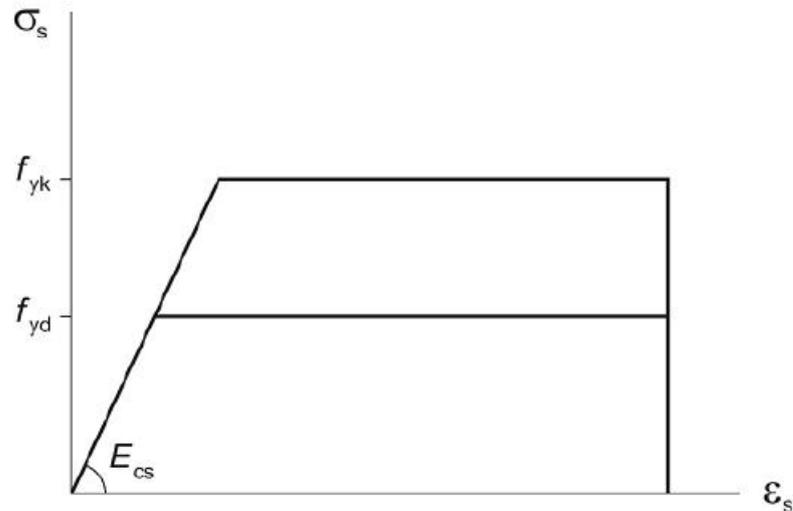
Figura 17 – Modelo constitutivo para o concreto na tração segundo a NBR 6114:2014.



Fonte: NBR 6118:2014²⁶

Para as armaduras de aço, a norma brasileira recomenda a relação tensão-deformação mostrada a Figura 18.

Figura 18 – Modelo constitutivo para o aço segundo a NBR 6118:2014.

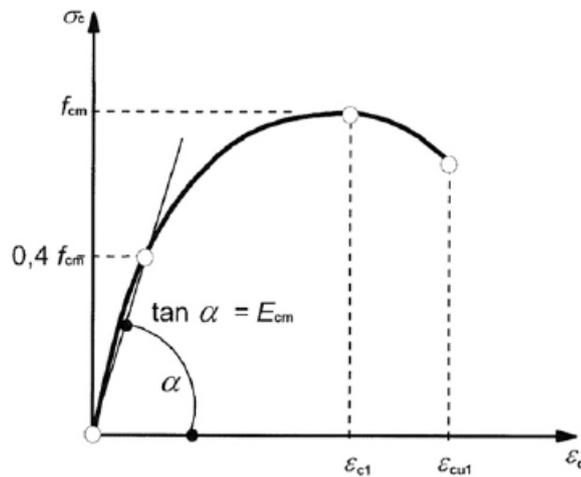


Fonte NBR 6118:2003

Fonte: NBR 6118:2014²⁶

Outro modelo elástico bastante utilizado é o proposto no Eurocode 2⁴³. Este sugere a curva tensão-deformação do concreto seja a apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Modelo constitutivo para o concreto na compressão segundo o Eurocode 2.



Fonte: Eurocode 2:2004

Fonte: Eurocode¹⁹

Os modelos elásticos são largamente utilizados não só no contexto de projetos, mas também em pesquisas e simulações numéricas mais sofisticadas. Assim, Parente *et al.*⁴⁵ utilizaram modelos constitutivos elásticos para o concreto (Eurocode e a NBR 6118) e o aço (bilinear) na análise não linear de pórticos planos de concreto armado, obtendo excelentes resultados na

comparação com resultados de ensaios monotônicos.

Contudo, estes modelos podem não ser adequados para a simulação do colapso progressivo, pois neste caso, após a retirada de um pilar, a parte da viga que estava comprimida devido à flexão passa a ser tracionada devido ao efeito catenária. Esta inversão no sinal das deformações e tensões, representa uma forma de descarregamento da estrutura, fazendo com que o carregamento não possa ser considerado monotônico. Assim, modelos constitutivos mais complexos podem ser necessários.

3.3.2 Modelos Constitutivos Elastoplásticos

Tanto a teoria da elasticidade quanto a da plasticidade são por natureza fenomenológicas. Isto é, ambas são a formalizações de observações feitas no comportamento macroscópico de ensaios de corpos deformáveis e não necessitam de muitos conhecimentos físicos e químicos para serem compreendidas de forma geral⁵⁴.

Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que após atingida a carga de escoamento do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo. Isto é, a estrutura do material se modifica de maneira irreversível, mas mantendo a parcela de deformação elástica constante. Vale salientar que neste caso, a deformação dita permanente é independente da velocidade do carregamento aplicado (*Rate-Independent Plasticity*).

Chen e Han⁵⁴ afirmam que a teoria da plasticidade é uma extensão necessária da teoria da elasticidade e que é necessário levar em consideração dois aspectos muito importante na sua formulação. O primeiro é a necessidade de obter uma relação tensão-deformação que descreva de maneira adequada o comportamento macroscópico observado. Essa relação é própria de cada material, mas pode-se dividir em três grupos, de acordo com o comportamento apresentado após a carga de escoamento.

O primeiro grupo corresponde aos materiais que apresentam aumento de resistência após o escoamento. Este fenômeno é conhecido como endurecimento ou *hardening*, sendo muito comuns em metais, como o aço. O segundo grupo apresenta amolecimento ou *softening*, caracterizado pela redução da tensão mesmo com o aumento da deformação após a carga de pico. Este comportamento é comum à materiais frágeis como concreto e rochas. Finalmente, um terceiro caso é a plasticidade perfeita, onde após a tensão atingir o valor de escoamento, esta se mantém constante indefinidamente.

O segundo aspecto importante ao se utilizar modelos elastoplásticos é a necessidade de adotar técnicas numéricas adequadas para descrição do comportamento tensão-deformação no contexto da análise de estruturas. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos mostra sua eficiência pela facilidade com que essa e outras características podem ser consideradas.

A formulação matemática da plasticidade tendo em vista a utilização em elementos finitos unidimensionais é mais simples porque dispensa a utilização de critérios de falha como

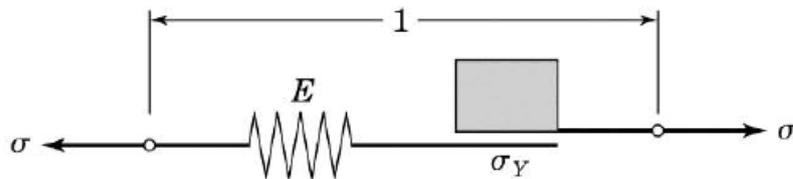
os de von Mises, Tresca, etc. No entanto, Souza Neto⁵⁵ afirma que apesar de simples, esta contém todas as características que formam a base matemática da referida teoria. Os modelos de elastoplásticos implementados neste trabalho foram obtidos a partir dos trabalhos de Simo⁵⁵ e Yaw⁵⁶.

3.3.2.1 Plasticidade Perfeita

No Modelo de Plasticidade Perfeita, considera-se que, após o material atingir a sua tensão de escoamento (σ_Y), esta vai se manter constante enquanto a deformação total (ϵ) aumentar. Assim, a deformação total terá uma parcela irrecuperável (ϵ^P) que cresce enquanto o carregamento continuar.

Pode-se compreender mais facilmente este comportamento analisando o sistema mecânico apresentado na Figura 20. Neste, uma mola com Módulo de Elasticidade E está ligada a um dispositivo de atrito de Coulumb com constante $\sigma_Y > 0$.

Figura 20 – Esquema para representar o comportamento elastolástico perfeito.



Fonte: Simo⁵⁵

Considerando que a tensão (σ) provocará uma deformação total (ϵ) no sistema, esta pode ser dividida em duas partes: a deformação devido a mola (ϵ^e), correspondendo à parte elástica, e a deformação devido ao dispositivo de atrito (ϵ^p), correspondendo à parcela plástica:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (72)$$

Dessa forma, para um valor constante de E , obtém-se para o valor da tensão σ dado por:

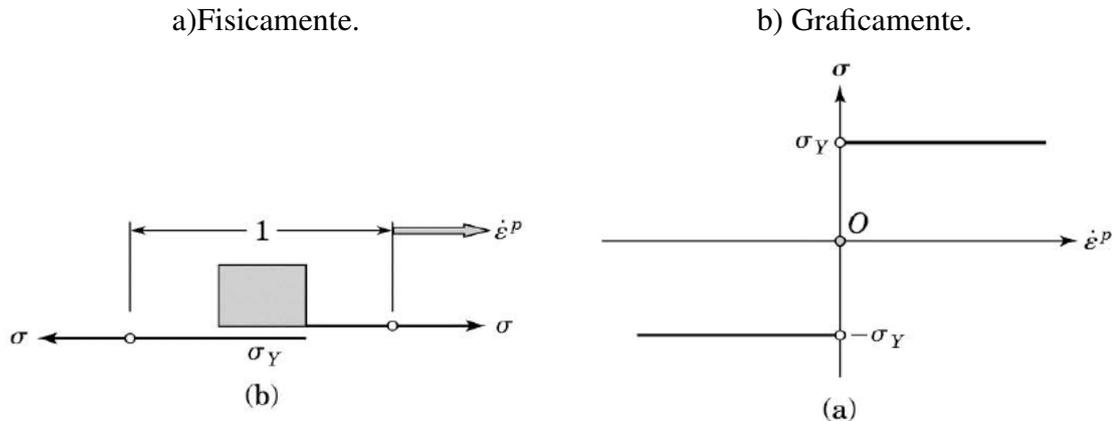
$$\sigma = E \epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^p) \quad (73)$$

Sabendo-se que o intervalo de tensão para esse modelo de plasticidade restringe-se a $[-\sigma_y, \sigma_y]$ e que o dispositivo de atrito só funcionará se $\epsilon^p \neq 0$, ou seja $|\sigma| = |\sigma_y|$. Pode-se isolar o comportamento deste dispositivo como representado nas Figuras 21 (a) e (b).

Portanto, pode-se definir o Critério de Escoamento $f(\sigma)$ como sendo:

$$f(\sigma) = |\sigma| - |\sigma_y| \quad (74)$$

Figura 21 – Comportamento do Dispositivo de Atrito de Coulomb.



fonte: Simo⁵⁵

Desse modo:

- Se $f(\sigma) < 0 \rightarrow$ o material estará no trecho elástico.
- Se $f(\sigma) = 0 \rightarrow$ o material estará no trecho plástico.

Pode-se ainda definir a *Taxa de Escoamento* (γ) como sendo a evolução da deformação permanente com o carregamento. Sabendo-se da irreversibilidade do fenômeno, tem-se que $\gamma \geq 0$. Esta está relacionada com a deformação plástica (ϵ^p) da seguinte maneira:

- $\dot{\epsilon}^p = \gamma$, se $\sigma = \sigma_y$
- $\dot{\epsilon}^p = -\gamma$, se $\sigma = -\sigma_y$

Vale salientar que, o sinal negativo de γ indica um incremento da deformação plástica na compressão e não que $\gamma \leq 0$. De maneira geral,

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (75)$$

onde,

- $\text{sign}(\sigma) = 1$, se $\sigma > 0$
- $\text{sign}(\sigma) = -1$, se $\sigma < 0$

Observa-se ainda que:

$$\begin{aligned} f(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ f(\sigma) = 0 &\Rightarrow \gamma > 0 \end{aligned} \quad (76)$$

Logo

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (77)$$

As Equações (76) e (77) são conhecidas como Condições de Complementaridade ou de Kuhn-Tucker⁵⁵.

Considerando agora que a variação da função no tempo ($\dot{f}(\sigma)$), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ \dot{f}(\sigma) = 0 &\Rightarrow \gamma > 0 \end{aligned} \quad (78)$$

logo

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (79)$$

As Equações (78) e (79) são conhecidas como Condições de Consistência. Organizando todos os conceitos acima pode-se construir o resumo abaixo:

Relação Tensão-Deformação

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (80)$$

Função de Escoamento

$$\dot{\varepsilon} = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (81)$$

Condição de Escoamento

$$f(\sigma) = |\sigma| - |\sigma_Y| \leq 0 \quad (82)$$

Condição de Complementariedade de Kuhn-Tucker

$$\gamma \leq 0, \quad f(\sigma) \leq 0 \quad \gamma f(\sigma) = 0 \quad (83)$$

Condição de Consistência

$$\gamma \leq 0, \quad \dot{f}(\sigma) \leq 0 \quad \gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (84)$$

3.3.2.2 Plasticidade com Endurecimento Isotrópico

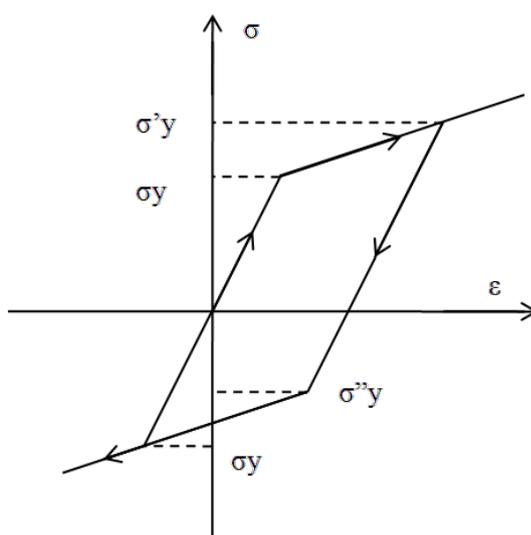
O fenômeno do endurecimento ou *hardening* é característico de vários metais. A principal diferença do modelo anterior é que os limites do intervalo $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$ mudam quando o material começa a plastificar.

Se for realizado um ensaio de compressão em uma barra de aço, por exemplo, e for representado os valores de tensão e deformação obtidos em módulo, serão obtidas duas curvas praticamente iguais. No entanto, se for aplicado uma tensão de tração suficiente para plasti-

ficar o material antes de fazer o ensaio de compressão, será obtido uma curva completamente diferente da curva do primeiro teste de compressão com o material ainda virgem⁵⁴.

Analisando a Figura 22 abaixo verifica-se que, aplicada uma tensão de tração inicial σ'_Y e depois realizando o ensaio de compressão, verifica-se que o material vai começar a plastificar em uma tensão σ''_Y menor do que o limite inicial σ_Y e muito menor do que σ'_Y . Este fenômeno é conhecido como *Efeito de Bauschinger* e evidencia que, em um modelo constitutivo elastoplástico, a deformação não é uma função apenas da tensão, mas também da história de carregamento e descarregamento do material. Diz-se então, que o comportamento do material é dependente do caminho ou trajetória de carregamento (*path dependent*).

Figura 22 – Efeito Bauschinger.



Fonte: Próprio autor.

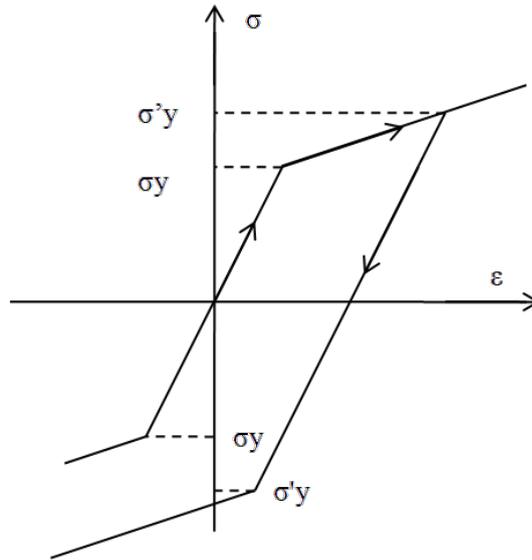
O encruamento pode ser classificado em três categorias: isotrópico, cinemático e independente. No Encruamento Isotrópico o Efeito Bauschinger é completamente desprezado. Isto é, no caso da Figura 22, o material entraria em plastificação na zona de compressão na tensão σ'_Y e não na σ''_Y , como ilustrado na Figura 23.

Analisando a Figura 23, percebe-se que quando maior a tensão atuante (σ) for em relação a σ_Y , maior será a faixa do trecho elástico. Já no Encruamento Cinemático, considera-se que o trecho elástico continua com o mesmo tamanho durante o processo de plastificação. Isto é, o Encruamento Cinemático considera totalmente o Efeito Bauschinger, como mostra a Figura 22.

Finalmente, o Encruamento Independente acontece quando a variação da tensão de escoamento na tração, por exemplo, não altera o valor da tensão de escoamento na compressão. Isto pode ser mais bem compreendido analisando a Figura 24.

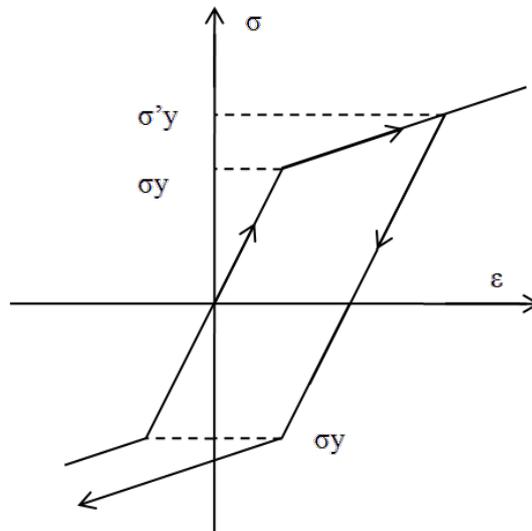
Vale salientar que neste trabalho, o Efeito de Bauschinger não foi considerado. Assim, tem-se uma consideração isotrópica da variação da Tensão de Escoamento.

Figura 23 – Encruamento Isotrópico.



Fonte: Próprio autor.

Figura 24 – Hardening Independente



Fonte: Próprio autor.

Para compreender matematicamente o efeito do encruamento, deve-se definir duas variáveis. A primeira é a *Variável de Hardening* (α) e a segunda é o *Módulo Plástico* (K). Neste trabalho, a variável que descreve o encruamento é a deformação plástica acumulada:

$$\alpha = \int_0^t |\dot{\epsilon}^p| dt = |\epsilon^p| \quad (85)$$

O uso do módulo da deformação deve-se à consideração de encruamento isotrópico.

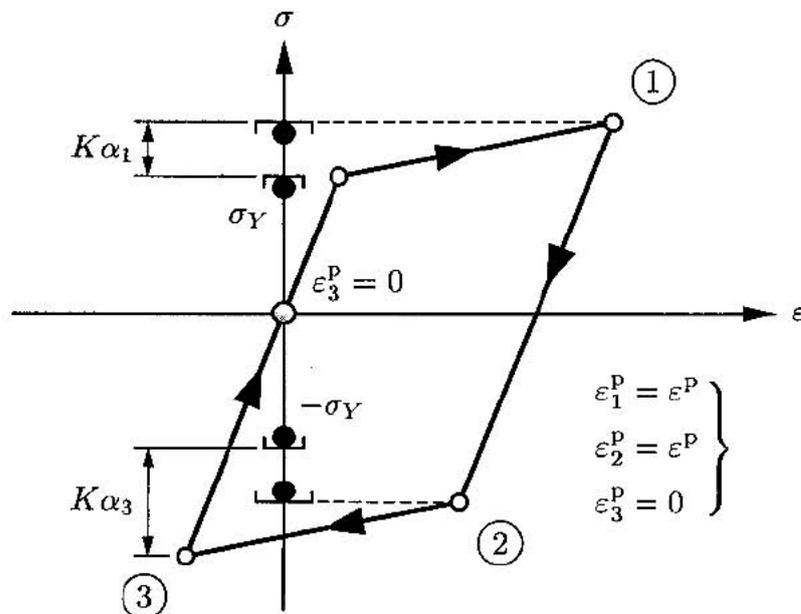
O módulo plástico está ligado à variação da tensão de escoamento σ_y com o au-

mento da deformação plástica. O caso mais simples, e mais utilizado na prática, corresponde ao encruamento linear ilustrado na Figura 25. Este encruamento pode ser representado matematicamente como:

$$G(\alpha) = \sigma_Y + K\alpha \quad (86)$$

onde $G(\alpha)$ corresponde à tensão de escoamento do material com encruamento isotrópico. Desse modo, com um valor positivo de K tem-se uma inclinação positiva do trecho de plastificação, indicando *hardening*. Caso K seja negativo, tem-se uma inclinação negativa da curva tensão-deformação, indicando *softening*. Finalmente, $K = 0$ corresponde ao modelo elastoplástico perfeito.

Figura 25 – Representação da estrutura matemática do Hardening



Fonte: Simo e Hughes⁵⁵.

A interpretação da irreversibilidade deste fenômeno é semelhante à da plasticidade perfeita. De maneira que temos $\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$. Novamente, esta característica fenomenológica é representada pelas condições de Kuhn-Tucker e pelas condições de consistência.

A principal diferença deste modelo concentra-se na definição da função de escoamento, que agora será uma função de vários parâmetros, entre eles K e α . Esta função pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha) \quad (87)$$

onde $G(\alpha)$ é uma função que descreve a variação da tensão de escoamento σ_Y . A expressão desta função para o caso de encruamento linear é mostrada na Equação (86).

De maneira geral, pode-se organizar os conceitos acima no quadro abaixo:

Relação Tensão-Deformação

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (88)$$

Função de Escoamento

$$\dot{\varepsilon} = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (89)$$

Condição de Escoamento

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha) \leq 0 \quad (90)$$

Condição de Complementariedade de Kuhn-Tucker

$$\gamma \leq 0, \quad f(\sigma) \leq 0 \quad \gamma f(\sigma) = 0 \quad (91)$$

Condição de Consistência

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (\text{para } f(\sigma) = 0) \quad (92)$$

Sabendo-se que $\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$ (condição de Kuhn-Tucker), logo quando $\gamma > 0$, $\dot{f}(\sigma) = 0$. Portanto, utilizando da regra da cadeia, tem-se:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \quad (93)$$

substituindo os valores de $f(\sigma)$ e α , desenvolvendo e isolando-se o valor de γ , obtém-se

$$\gamma = \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\varepsilon}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \quad (94)$$

Com o resultado acima e sabendo que $E_t = \partial \sigma / \partial \varepsilon$,

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (95)$$

Desenvolvendo,

$$\dot{\sigma} = E(\varepsilon - \gamma \text{sign}(\sigma)) \quad (96)$$

$$\dot{\sigma} = E\left(\dot{\varepsilon} - \frac{(\text{sign}(\sigma)^2 E \dot{\varepsilon})}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}}\right) \quad (97)$$

$$\dot{\sigma} = \left[\frac{E \frac{\partial G}{\partial \alpha}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \right] \dot{\epsilon} \quad (98)$$

Assim, pode-se escrever o módulo tangente elastoplástico (E_t) como:

$$E_t = \frac{E \frac{\partial G}{\partial \alpha}}{E + \frac{\partial G}{\partial \alpha}} \quad (99)$$

No caso do encruamento linear, Equação (86), o módulo tangente elastoplástico é dado por:

$$E_t = \frac{E K}{E + K} \quad (100)$$

Tabela 5 – Funções $G(\alpha)$ utilizadas

$G(\alpha)$	Tipo	Autor
$G(\alpha) = \sigma_y + k\alpha$	Linear	Simo e Hughes ⁵⁵
$G(\alpha) = \sigma_y + (1 + k\alpha^h)$	Não Linear	Iribaren <i>et al</i> ⁵¹
$G(\alpha) = \sigma_y + (1 + k\alpha^h)$	Não Linear	Yaw ⁵⁶

Neste trabalho, foram utilizado três definições para $G(\alpha)$ apresentadas na Tabela 5. Dessa forma, utilizando os conceitos e as funções $G(\alpha)$ acima, pode-se construir os algoritmos apresentados a seguir.

Dados: E, σ_y e K

Resultado: $\sigma, \varepsilon_{n+1}^p, E_t$ e α_{n+1}

Obtem a deformação ε_{n+1} da iteração vigente;

inicialização ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n^p ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n ;$$

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$f(\sigma)_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - (\sigma_y + K\alpha_{n+1}^{teste}) ;$$

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ **então**

Status: Elástico;

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} ;$$

$$E_t = E ;$$

fim

senão

Status: Plástico;

$$\Delta\gamma = \frac{f(\sigma)_{n+1}^{teste}}{E+K} ;$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{ sign}(\sigma) ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma ;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$E_t = \frac{EK}{E+K} ;$$

fim

Resolve a Equação de equilíbrio;

se $g - f \leq tol$ **então**

$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{teste} ;$

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$

fim

senão

Retorna ao início;

fim

Algoritmo 1: Plasticidade com Endurecimento Linear (ISOLINHARD).

Dados: E, σ_y, K e h

Resultado: $\sigma, \varepsilon_{n+1}^p, E_t$ e α_{n+1}

Obtem a deformação ε_{n+1} da iteração vigente;

inicialização ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n^p ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n ;$$

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$f(\sigma)_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - \sigma_y(1 + K(\alpha_{n+1}^{teste})^h) ;$$

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ **então**

 Status: Elástico;

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} ;$$

$$E_t = E ;$$

fim

senão

 Status: Plástico;

 Utiliza $f(\sigma)_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma E - G(\alpha_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$ para encontrar $\Delta\gamma$

 Utilizando Newton Raphson ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma) ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma ;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$dG = \sigma_y K h \alpha^{h-1} ;$$

$$E_t = \frac{EdG}{E+dG} ;$$

fim

Resolve a Equação de equilíbrio;

se $g - f \leq tol$ **então**

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{teste} ;$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

fim

senão

 Retorna ao início;

fim

Algoritmo 2: Plasticidade com Endurecimento Não Linear (ISONONLI-NHARD).

Dados: E , σ_y e δ

Resultado: σ , ε_{n+1}^p , E_t e α_{n+1}

Obtem a deformação ε_{n+1} da iteração vigente;

inicialização ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n^p ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n ;$$

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$f(\sigma)_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - \sigma_y e^{\delta \alpha_{n+1}^{teste}} ;$$

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ **então**

 Status: Elástico;

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} ;$$

$$E_t = E ;$$

fim

senão

 Status: Plástico;

 Utiliza $f(\sigma)_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma E - G(\alpha_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$ para encontrar $\Delta\gamma$

 Utilizando Newton Raphson ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma) ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma ;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$dG = \sigma_y \delta e^{\delta \alpha_{n+1}^{teste}} ;$$

$$E_t = \frac{EdG}{E+dG} ;$$

fim

Resolve a Equação de equilíbrio;

se $g - f \leq tol$ **então**

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{teste} ;$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

fim

senão

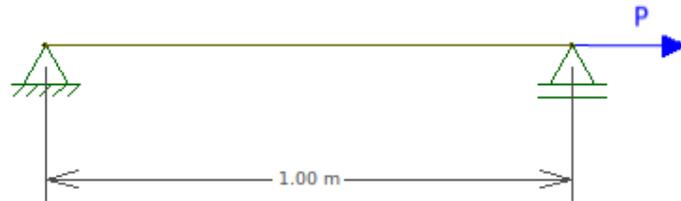
 Retorna ao início;

fim

Algoritmo 3: Plasticidade com Endurecimento Exponencial (ISOEXPHARD).

A implementação destes três modelos apresentados, resolveu-se testá-los em modelar um único elemento de treliça sob condições de carregamentos e apoios apresentados na Figura 26. Esta tem um comprimento 1 m, uma seção transversal de 1.10^{-4} m^2 , um Módulo de Elasticidade 200 GPa e uma tensão de escoamento 400 MPa.

Figura 26 – Modelo em treliça utilizado para testar os modelos constitutivos.

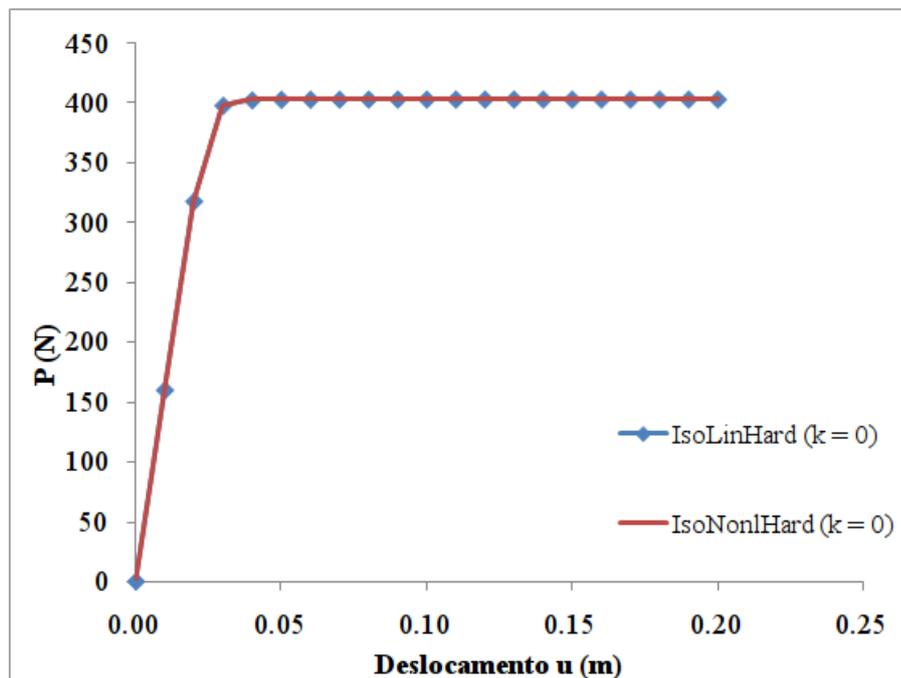


Fonte: Próprio autor.

Optou-se por elemento de treliça para que fosse considerado apenas o comportamento do modelo constitutivo, sem a influência de erros na inerente a integração de elementos de pórtico.

Para analisar o modelo de plasticidade perfeita, basta utilizar o modelo ISOLINHARD e ISONONLINHARD com $K = 0$. Dessa forma, modelou-se o elemento de treliça citado com ambos os modelos com os parâmetros apresentados. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 27.

Figura 27 – Teste do modelo de plasticidade perfeita.



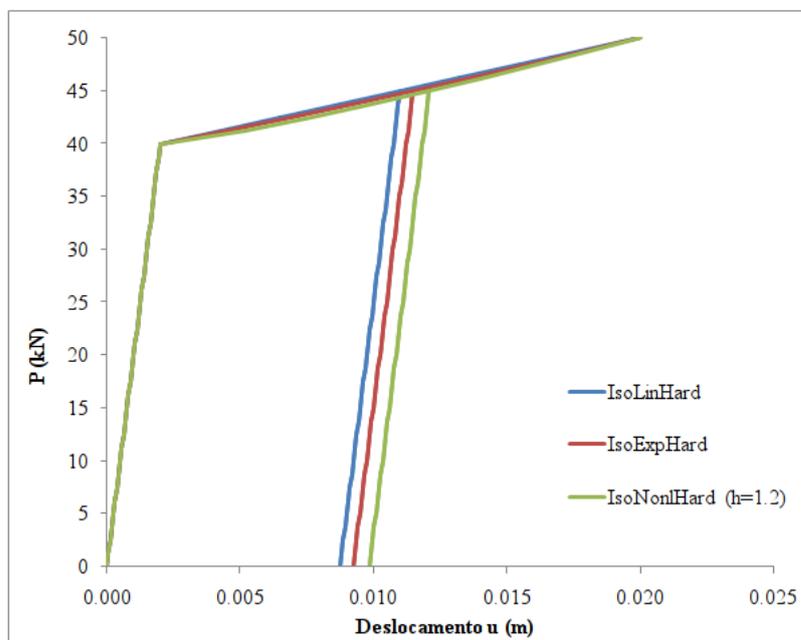
Fonte: Próprio autor.

Como era esperado, os modelos foram capazes de representar um comportamento de plasticidade perfeita. Ambos apresentam resultado exatamente iguais, o que mostra a equivalência dos modelos para este caso.

O encruamento isotrópico foi testado utilizando os três modelos descritos anteriormente. Nestes testes, utilizou-se os Modelos ISOLINHARD com $K = 5.7142857 \cdot 10^9$ GPa, o modelo ISONONLINHARD com $K = 32$ Pa e $H = 1.2$ e o modelo ISOEXPHARD com $\delta = 12.75106$. Estes parâmetros foram escolhidos de maneira a obter-se curvas tensão-deformação similares para o carregamento aplicado.

Nestes testes o elemento foi submetido a um carregamento monotônico de tração até o patamar de escoamento ser atingido. Em seguida, este foi submetido a um ciclo de carregamento, descarregamento e recarregamento. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 28.

Figura 28 – Teste para Avaliar o modelo de Plasticidade com Endurecimento Linear, não linear e Exponencial.



Fonte: Próprio autor.

Assim como no resultado anterior, os modelos obtiveram respostas equivalentes, mostrando sua capacidade de representar o comportamento em estudo. Como esperado, ao descarregar e recarregar, os modelos o fizeram em trechos paralelos ao trecho elástico inicial, o que mostra que a principal e única diferença entre os modelos é a variação da tensão de escoamento com a deformação plástica acumulada.

3.3.2.3 Modelo constitutivo do aço

O modelo elastoplástico com encruamento linear (ISOLINHARD) foi utilizado como base para construir o modelo constitutivo do aço utilizado como armadura do concreto armado (barras de reforço). Este modelo foi escolhido porque o aço apresenta os mesmos valores da tensão de escoamento para a compressão e para a tração, como ocorre no encruamento

isotrópico.

No entanto, o modelo ISOLINHARD não considera o rompimento do material após a deformação última, mas o que o material continuaria se deformando plasticamente sem limite, fazendo com que a tensão neste material atingisse valores muito acima da realidade.

Dessa forma, para caracterizar o comportamento do aço, foram colocados limites de deformação máxima para caracterizar a ruptura do material. Estes limites são parâmetros do modelo e devem ser definidas a partir das características do aço utilizado. Caso a deformação ultrapasse do material este limite, então a tensão é considerada nula para o resto da análise, de forma a simular a ruptura da barra, que é um fenômeno irreversível. Este modelo foi implementado de acordo com o algoritmo descrito a seguir.

Dados: E , σ_y e K

Resultado: σ , ϵ_{n+1}^p , E_t e α_{n+1}

Obtem a deformação ϵ_{n+1} da iteração vigente;

inicialização ;

$$\epsilon_{n+1}^{p\ teste} = \epsilon_n^p ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n ;$$

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$f(\sigma)_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - (\sigma_y + K\alpha_{n+1}^{teste}) ;$$

se $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_u$ **então**

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ **então**

 Status: Elástico;

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} ;$$

$$E_t = E ;$$

fim

senão

 Status: Plástico;

$$\Delta\gamma = \frac{f(\sigma)_{n+1}^{teste}}{E+K} ;$$

$$\epsilon_{n+1}^{p\ teste} = \epsilon_n + \Delta\gamma \text{ sign}(\sigma) ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma ;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$E_t = \frac{EK}{E+K} ;$$

fim

fim

senão

 Status: Falha do material;

fim

Resolve a Equação de equilíbrio;

se $g - f \leq tol$ **então**

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{teste} ;$$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

fim

senão

 Retorna ao início;

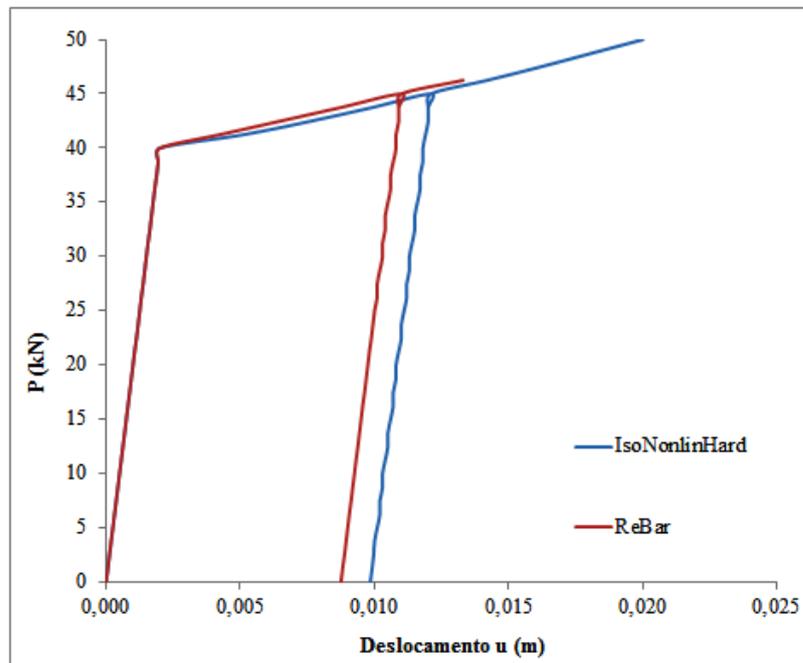
fim

Algoritmo 4: Modelo constitutivo do aço (REBAR).

O mesmo elemento de treliça da Figura 26 foi utilizando no teste deste modelo. Os parâmetros utilizados foram módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, tensão de escoamento

$\sigma_y = 400$ MPa, módulo plástico $K = 5.7142857 \cdot 10^9$ GPa e deformação última $\epsilon_u = 12 \cdot 10^{-3}$. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 29. É importante notar que a análise para na deformação de ruptura, pois o material não é mais capaz de suportar o carregamento aplicado, ao contrário do que ocorre com o modelo que considera um encruamento isotrópico puro.

Figura 29 – Teste do modelo REBAR.

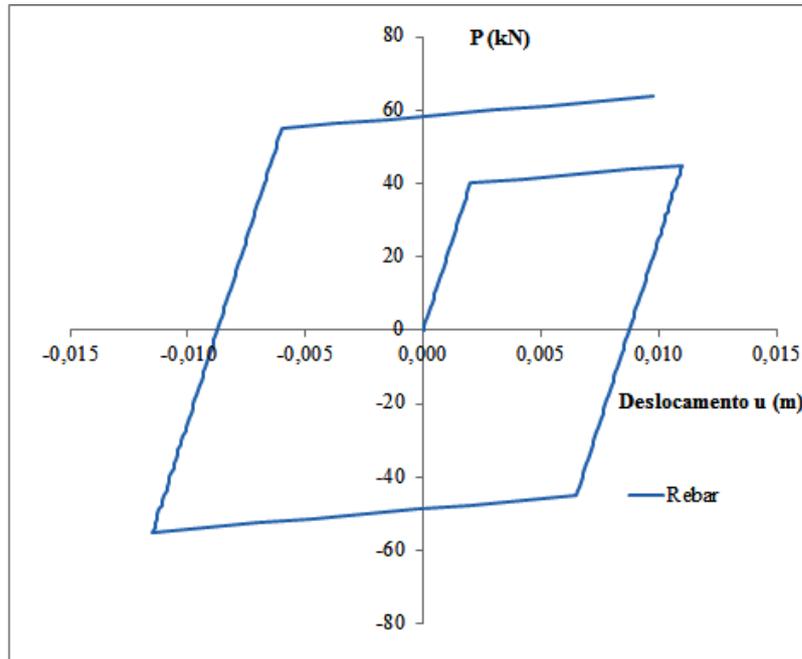


fonte: Próprio autor.

Com objetivo de testar o modelo na compressão e na tração, o elemento de treliça foi carregado até plastificar na tração, depois este foi descarregado e em seguida comprimido até plastificar na compressão. Depois recarregou-se a barra até esta atingir a tensão de escoamento na tração outra vez. A curva carga-deslocamento obtida é apresentada na Figura 30.

Conforme pode ser visto nas Figuras 29 e 30, o modelo constitutiva das barras de reforço (armadura) foi capaz de captar o comportamento elastoplástico. Este apresentou uma variação isotrópica das tensões de escoamento (compressão e tração), mas considerando a ruptura do material.

Figura 30 – Teste do modelo constitutivo plástico para o aço na compressão e tração.



fonte: Próprio autor.

3.3.2.4 Plasticidade com (Softening) para concreto

Para construir o modelo constitutivo para o concreto utilizou-se o modelo ISONON-LINHARD como base. Para isso, deve-se utilizar o valor de K negativo e o de h conforme o tipo de Softening requerido (linear ou não linear).

Mais uma vez, o modelo tomado com base não possui limite de ruptura e este parâmetro foi modificado para melhor representar este material. Além disso, considera que os limites de escoamento para a compressão e tração são os mesmos, fato este que não condiz com o comportamento do concreto. Dessa forma, o algoritmo contém um mecanismo que trata os dois parâmetros de forma diferenciada, conforme os valores de entrada do usuário.

Optou-se por manter o trecho elástico linear e que o material perde a sua total capacidade de suporte caso venha a colapsar na compressão ou na tração. O algoritmo resultante para implementação deste modelo é apresentado a seguir.

Dados: $E, \sigma_y^c, K^c, h^c, \varepsilon_u^c, \sigma_y^t, K^t, h^t, \varepsilon_u^t$

Resultado: $\sigma, \varepsilon_{n+1}^p, E_t$ e α_{n+1}

Obtem a deformação ε_{n+1} da iteração vigente;

inicialização ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n^p ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n ;$$

$$\sigma_{n+1}^{teste} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

se $\varepsilon_{n+1} < 0$ e $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_u^c|$ **então**

Status: **COMPRESSÃO**;

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ **então**

Status: compressão Elástica;

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste} ;$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} ;$$

$$E_t = E ;$$

fim

senão

Status: Compressão Plástica;

Utiliza $f(\sigma)_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma E - G(\alpha_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$ para encontrar $\Delta\gamma$

Utilizando Newton Raphson ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma) ;$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma ;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste}) ;$$

$$dG = \sigma_y K h \alpha^{h-1} ;$$

$$E_t = \frac{EdG}{E+dG} ;$$

fim

fim

Algoritmo 5: Modelo elastoplástico para o concreto.

Continuação;

senão se $\varepsilon_{n+1} > 0$ e $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_u^t$ então

Status: **TRAÇÃO** ;

se $f(\sigma)_{n+1}^{teste} \leq 0$ então

Status: Tração Elástica;

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste};$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste};$$

$$E_t = E;$$

fim

senão

Status: Tração Plástica;

Utiliza $f(\sigma)_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma E - G(\alpha_{n+1}) + G(\alpha_n) = 0$ para encontrar $\Delta\gamma$

Utilizando Newton Raphson ;

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ teste} = \varepsilon_n + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma);$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n + \Delta\gamma;$$

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ teste});$$

$$dG = \sigma_y K h \alpha^{h-1};$$

$$E_t = \frac{EdG}{E+dG};$$

fim

fim

senão se $|\varepsilon_{n+1}| > |\varepsilon_u^c|$ ou $\varepsilon_{n+1} > \varepsilon_u^t$ então

Status: Falha do Material;

$$\sigma_{n+1} = 0;$$

$$E_t = 0;$$

fim

Resolve a Equação de equilíbrio;

se $g - f \leq tol$ então

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{teste};$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ teste};$$

fim

senão

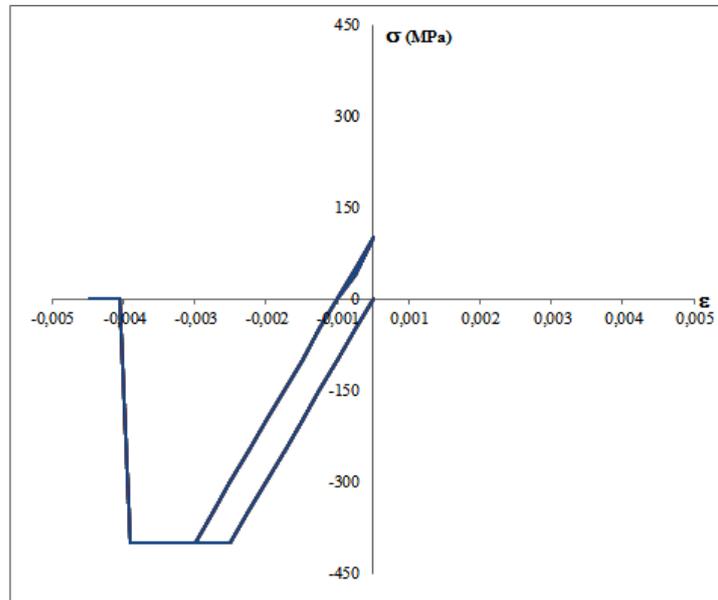
Retorna ao início;

fim

Para testar este modelo, utilizou-se o elemento de treliça da Figura 26. Inicialmente, testou-se o modelo de concreto com plasticidade perfeita e limites iguais para compressão e tração. Para isso, foram utilizados os mesmos parâmetros do caso anterior ($K = 0$). Inicialmente testou-se apenas na compressão e, em seguida, na compressão e tração. Os resultados

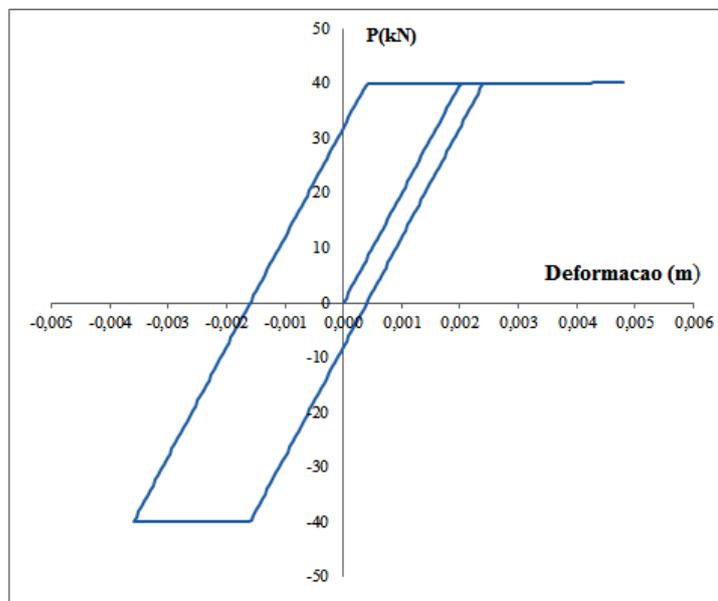
encontram-se nas Figuras 31 e 32. Conforme pode ser visto, o modelo representa o comportamento esperado para o concreto.

Figura 31 – Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão.



fonte: Próprio autor.

Figura 32 – Teste do modelo constitutivo plástico para o concreto na compressão e tração.



fonte: Próprio autor.

3.3.3 Mecânica do Dano

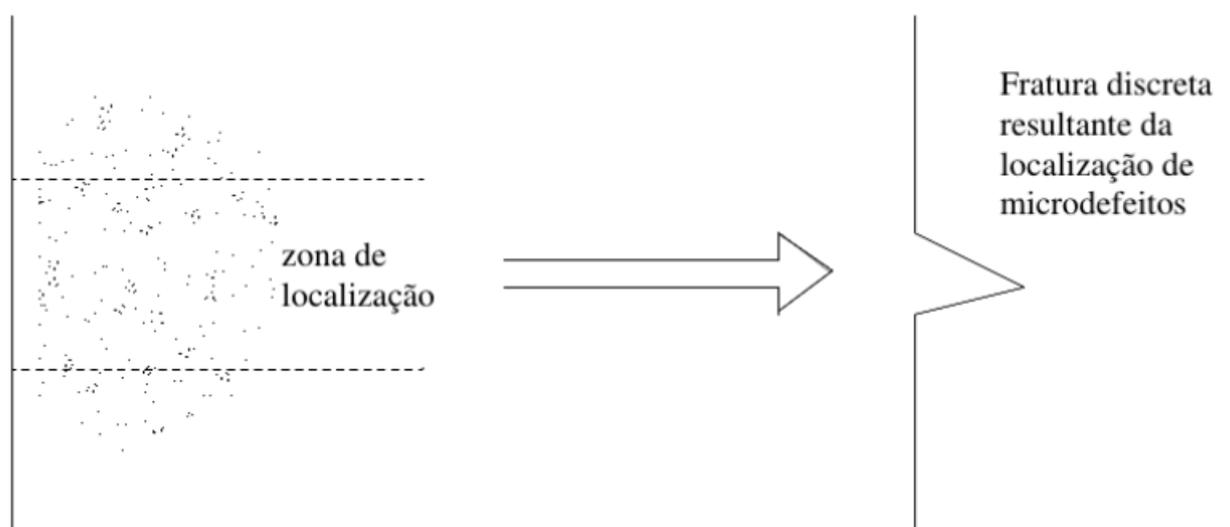
A resposta não linear física dos sólidos observada macroscopicamente, é uma manifestação de processos irreversíveis que ocorrem em sua microestrutura, tais como: escorregamentos relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contorno de grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros⁵⁷. Alguns destes processos dão origem a microdefeitos no material que constituem no dano inicial do elemento.

A Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura referem-se à parte da Física que estudam o modo como esses microdefeitos evoluem afetando a rigidez do material através da microfissuração, até o surgimento de fissuras discretas, e como estas progridem, respectivamente⁵⁸.

Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada da seguinte forma: na Mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuração) considerado continuamente distribuído. Já na Mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma trinca em num meio mecanicamente intacto^{57,58}, como ilustrado na Figura 33.

Portanto, nos modelos de dano, o material é tratado um contínuo, com o efeito das micro-trincas sendo tratado através da redução da rigidez do material. Por outro lado, na Mecânica da Fratura, a trinca macroscópica deve ser modelada explicitamente.

Figura 33 – Processo de evolução de fissuração distribuída para a uma trinca discreta.



Fonte: Proença⁵⁷.

O primeiro modelo de dano foi proposto por Kachanov em 1958, mas foi Robotinov

em 1963, que propôs a redução da seção transversal devido a microfissuração com uma medida adequada para medir o estado interno de danificação do material⁵⁸. Um variável interna (D) é utilizada para descrever a evolução do dano. Esta variável pode ser definida como:

$$D = \frac{A - A'}{A} = \frac{A_d}{A} \quad (101)$$

onde A é a área totalmente intacta, A' é a área efetiva, ou seja, a parcela que ainda não foi danificada, de maneira que a parcela danificada da área A_d é igual a $A - A'$. Quando o material ainda está intacto, a área danificada A_d é zero, portanto, $D = 0$. Já quando o material perdeu toda sua resistência, área de dano A_d será igual a área A , portanto $D = 1$.

Desse modo, a evolução da danificação do material é representado pela da perda de capacidade resistente através da diminuição do Módulo de Elasticidade⁵⁹. Portanto, pode-se representar esta variação por:

$$E' = (1 - D) E_0 \quad (102)$$

onde, E_0 é o Módulo de Elasticidade do material intacto e E' o Módulo de Elasticidade dada uma condição de danificação do material representado pela variável D . Assim, a relação tensão-deformação linear fica:

$$\sigma' = E' \varepsilon \quad (103)$$

onde σ' é a tensão efetiva. Vale salientar que, como considera-se o meio contínuo, a deformação ε é igual a deformação efetiva^{59,60}.

No caso do concreto, um material no qual a fissuração é responsável de modo dominante pela resposta inicial não-linear, a Mecânica do Dano é sem dúvida capaz de formular modelos constitutivos bastantes representativos, que se aplicam também à análise de estruturas de concreto armado⁵⁷.

A Mecânica do Dano Contínuo, formalizada por Lameitre e Chaboche⁵⁹, baseia-se em uma metodologia fundamentada na termodinâmica dos Meios Contínuos. Nesta, a Primeira e a Segunda Lei da Termodinâmica são combinadas de forma a gerar uma inequação, a chamada *Desigualdade de Clausius-Duhem*^{58,60}.

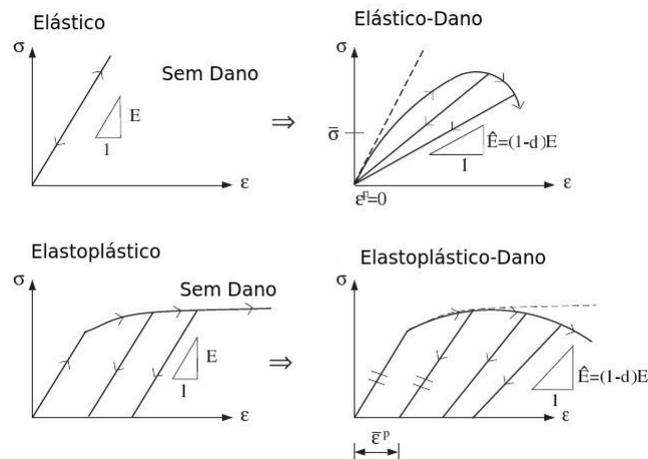
Esta desigualdade é utilizada como um critério de aceitação de um modelo de dissipação de energia devido a evolução do dano. Esta deve valer para processos reversíveis, quando houver apenas deformações elásticas, e irreversíveis, para haver processos inelásticos.

Existem diversos modelos de concreto armado na literatura que consideram este efeito. Légeron *et al*⁶⁰ que apresenta um modelo constitutivo baseado na lei de dano proposta por La Borderie⁶¹. Este é utilizado para avaliar o comportamento de estruturas de concreto armado frente a sismos. Os resultados obtidos mostram-se satisfatórios, confirmando que a consideração do dano para modelos de concreto armado mostra-se eficiente em representar

mais precisamente o comportamento não linear deste material.

O processo de falha de qualquer material é caracterizado pelo acúmulo de deformações permanentes (plásticas) e pela degradação do material. Estes aspectos são ilustrados na Figura 34. Dessa forma, modelos constitutivos que incorporam ambas características tem potencial para uma descrição mais realista do comportamento do concreto. Contudo, o estudo de modelos que acoplam dano e plasticidade é complexo e está fora do escopo deste trabalho.

Figura 34 – Modelos constitutivos com dano e plasticidade.

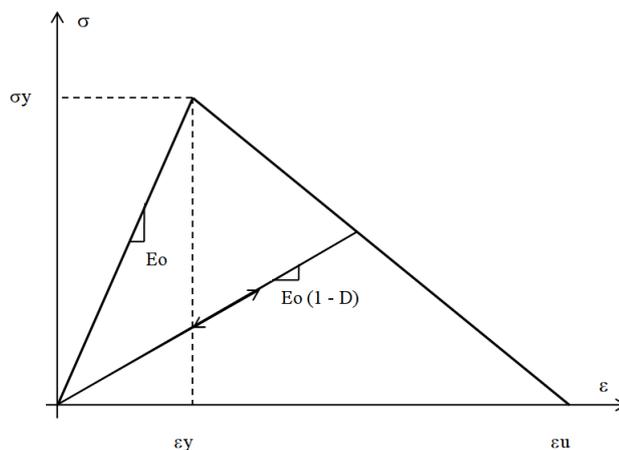


Fonte: Proença⁵⁷.

3.3.3.1 Modelo de Dano Bilinear

Neste trabalho optou-se por utilizar o modelo de dano bilinear ilustrado na Figura 35. A vantagem deste modelo é a simplicidade na determinação da variável de dano D .

Figura 35 – Modelo de dano bilinear



fonte: Próprio autor.

Utilizando semelhança de triângulos tem-se que:

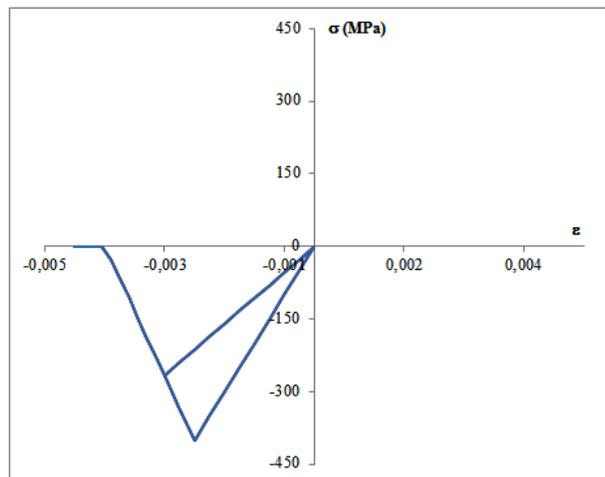
$$\frac{(1-D)E\varepsilon}{\sigma_y} = \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_{max}}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \quad (104)$$

$$D = \left(\frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} \right) \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{max}} \quad (105)$$

onde ε_{max} é a máxima de formação que o corpo já foi exposto, ε_y é o limite elástico, ε_u é a deformação última, σ_y é a tensão máxima do material (tensão de pico).

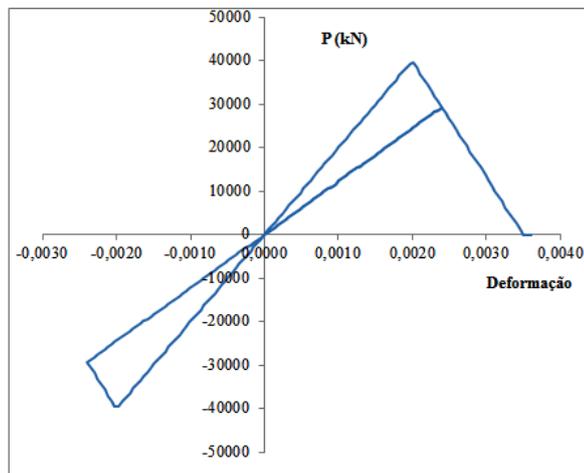
Para testar o modelo utilizou-se o mesmo caso do elemento de treliça da Figura 26. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 36 e 37, mostrando que o modelo foi capaz de reproduzir os resultados esperados.

Figura 36 – Teste do modelo de dano na compressão.



fonte: Próprio autor.

Figura 37 – Teste do modelo de dano na compressão e na tração.



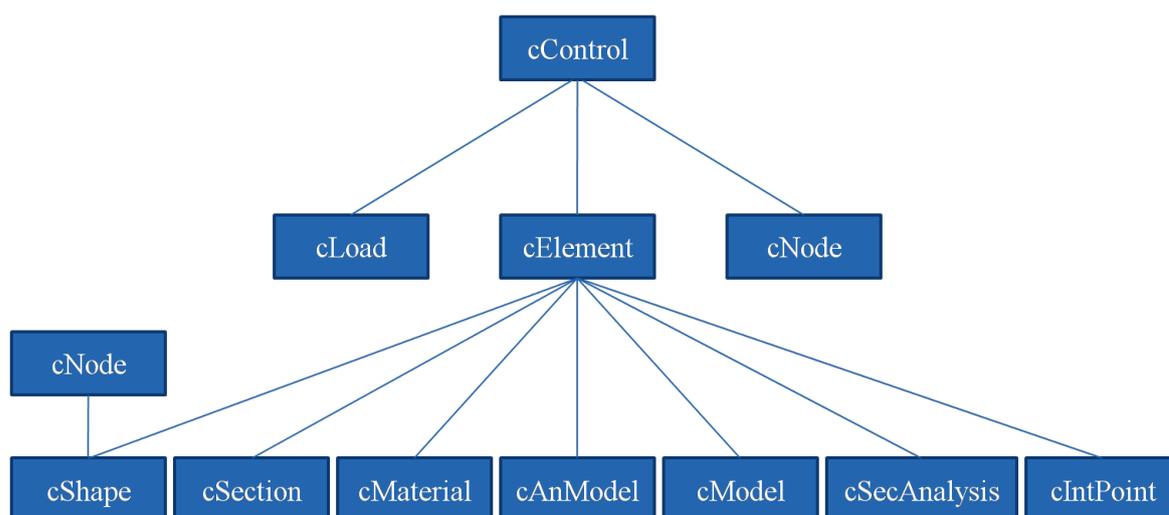
fonte: Próprio autor.

3.4 Implementação Computacional

A implementação dos modelos constitutivos discutidos nos itens anteriores foi realizada no software de elementos finitos FAST (*Finite Element Analysis Tool*). O FAST é um programa de código aberto implementado na linguagem C++ utilizando conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO). Este programa vem sendo continuamente expandido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará^{44,62-64}.

A estrutura do software faz uso dos conceitos de herança e polimorfismo a fim de evitar operações desnecessárias e repetições nos códigos, facilitando a implementação computacional. A estrutura global do programa, mostrando a associação entre as principais classes, é apresentada na Figura 38. Vale salientar que as linhas mostradas não representam uma relação de herança, mas uma relação do tipo *has a*.

Figura 38 – Visão geral da arquitetura do FAST.



fonte: Próprio autor.

A classe *cControl* é a classe responsável pelo controle dos diversos tipos de análises disponíveis (estáticas, dinâmicas, lineares e não lineares). Estes diferentes tipos de análise são implementados através da função virtual *Solver* implementada por cada sub-classe, através do mecanismo de polimorfismo. De particular interesse para este trabalho são as classes disponíveis para análise não linear estática, incluindo métodos como Controle de Carga, Controle de Deslocamentos e Comprimento de Arco. Por outro lado, a classe base implementa uma série de funções utilizadas pelos diversos métodos, através do mecanismo de herança. Estes métodos incluem a montagem de vetores (forças internas e externas) e matrizes globais (e.g. rigidez e massa), numeração dos graus de liberdade, impressão dos dados de saída, etc.

A classe *cLoad* define o comportamento geral das cargas externas em um sistema de elementos finitos e contém os métodos que são comuns para os diferentes tipos de cargas

a serem aplicadas (e.g. concentrada e distribuída em linha). As características específicas, incluindo a forma de cálculo do carregamento nodal equivalente, de cada uma são implementadas em classes derivadas desta principal. Esta classe também é responsável pelo armazenamento de todas as cargas presentes na malha. Uma característica importante da implementação é que todas as cargas podem variar no tempo, com esta variação sendo descrita com diferentes tipos de funções, como senoidal e linear por partes.

A classe *cNode* define o comportamento geral dos nós dos elementos finitos e lida com uma série de atributos (condições de contorno, molas, etc.) associada aos nós do modelo de análise.

As classes *cMaterial* e *cSection* são responsáveis pela leitura e armazenamento dos dados dos materiais e seções transversais, respectivamente. Estas classes ainda possuem métodos que permitem a consulta dos dados armazenados. Esta consulta pode ser realizada por objetos de outras classes, como *cModel* e *cSecAnalysis*.

A classe *cElement* gerencia todas as tarefas individuais de cada elemento da malha, contendo um objeto da classe *cShape*, que armazena suas funções de forma, um modelo de análise *cAnModel*, que é responsável pelo modelo matemático do problema a ser resolvido (campo de deslocamentos, deformações, graus de liberdade, etc.) e um modelo de análise de seção *cSecAnalysis*, que realiza integrações na seção transversal do elemento, se necessário.

Além disso, para cada ponto de integração do elemento, um objeto da classe *cInt-Point* é criado e, para cada um destes, é criado um objeto *cSecAnalysis*. Este objeto *cSecAnalysis* cria por sua vez, quantos modelos constitutivos (*cModel*) forem necessários. Assim, no caso de elementos isoparamétricos planos e tridimensionais, para cada ponto de integração é criado um modelo constitutivo, enquanto no caso de treliças, apenas um modelo constitutivo é criado por elemento, uma vez que as deformações são constantes. No caso de elementos de pórtico, cada objeto *cSecAnalysis* cria quantos pontos de integração ao longo da seção transversal forem necessários, em função do método utilizado (Gauss ou fibras).

Neste trabalho foram implementados classe *cModel* os modelos inelásticos unidimensionais (1D) discutidos anteriormente:

- *cMod1DPlastIsoLinHard*;
- *cMod1DPlastIsoNonLinHard*;
- *cMod1DPlastIsoExpHard*;
- *cMod1DPlastRebar*;
- *cMod1DPlastConcrete*;
- *cMod1DDamageConcrete*.

É importante notar que cada modelo constitutivo (i.e. objeto da classe *cModel*), armazena suas variáveis internas, como a deformação plástica acumulada ou a variável de dano.

Por outro lado, os parâmetros do material, como o módulo de elasticidade e o módulo plástico, são armazenados no objeto da classe *cMaterial* associado ao modelo constitutivo. Este aspecto é importante para evitar o armazenamento de dados desnecessários, pois o número de materiais diferentes em uma malha geralmente é pequeno, enquanto que o número de pontos de integração, e portanto de modelos constitutivos, pode ser muito grande.

A mesma relação existe entre as classes *cSection* e *cSecAnalysis*. A classe *cSection* armazena a geometria e os materiais de cada seção transversal, sendo seus objetos criados durante a leitura de dados. Por outro lado, a classe *cSecAnalysis* é responsável pela criação e armazenamento dos modelos constitutivos, bem como pela integração dos esforços internos e matriz tangente da seção transversal. Portanto, é criado um objeto desta classe para cada ponto de integração ao longo do comprimento do elemento.

Dados: $E, \sigma_y^c, \epsilon_u^c, \sigma_y^t, \epsilon_u^t$
Resultado: σ, D_{n+1} e E_t
 Obtem a deformação ϵ_{n+1} da iteração vigente;
 inicialização ;
se $\epsilon_{n+1} < 0$ e $|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_u^c|$ **então**
 | Status: **COMPRESSÃO**;
 | $\epsilon_{Cmax\ n+1}^{teste} = \epsilon_{max\ n}$;
 | $D_{C\ n+1}^{teste} = D_{C\ n}$;
 | **se** $|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_{max\ n+1}^{teste}|$ **então**
 | | Status: Compressão Elástica;
 | | $\sigma = (1 - D_{C\ n+1}^{teste})\epsilon_{n+1}$;
 | | $E_t = E$;
 | **fim**
 | **senão**
 | | Status: Compressão com Dano;
 | | $\epsilon_{Cmax\ n+1}^{teste} = \epsilon_{n+1}$;
 | | $D_{C\ n+1}^{teste} = \left(\frac{\epsilon_{Cmax\ n+1}^{teste} - \epsilon_y}{\epsilon_u - \epsilon_y} \right) \frac{\epsilon_u}{\epsilon_{Cmax\ n+1}^{teste}}$;
 | | $\sigma = (1 - D_{C\ n+1}^{teste})\epsilon_{n+1}$;
 | | $E_t = E$;
 | **fim**
fim
senão se $\epsilon_{n+1} > 0$ e $\epsilon_{n+1} < |\epsilon_u^c|$ **então**
 | $\epsilon_{Tmax\ n+1}^{teste} = \epsilon_{max\ n}$;
 | $D_{T\ n+1}^{teste} = D_{T\ n}$;
 | **se** $|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_{max\ n+1}^{teste}|$ **então**
 | | Status: Tração Elástica;
 | | $\sigma = (1 - D_{T\ n+1}^{teste})\epsilon_{n+1}$;
 | | $E_t = E$;
 | **fim**
 | **senão**
 | | Status: Tração com Dano;
 | | $\epsilon_{Tmax\ n+1}^{teste} = \epsilon_{n+1}$;
 | | $D_{T\ n+1}^{teste} = \left(\frac{\epsilon_{Tmax\ n+1}^{teste} - \epsilon_y}{\epsilon_u - \epsilon_y} \right) \frac{\epsilon_u}{\epsilon_{Tmax\ n+1}^{teste}}$;
 | | $\sigma = (1 - D_{T\ n+1}^{teste})\epsilon_{n+1}$;
 | | $E_t = E$;
 | **fim**
fim
senão se $|\epsilon_{n+1}| > |\epsilon_u^c|$ ou $\epsilon_{n+1} > \epsilon_u^t$ **então**
 | Status: Falha do Material;
 | $\sigma_{n+1} = 0$;
 | $D_{n+1} = 1$;
 | $E_t = 0$;
fim
 Resolve a Equação de equilíbrio;
se $g - f \leq tol$ **então**
fim
senão
 | Retorna ao início;
fim

Algoritmo 6: Modelo de dano bilinear

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, os elementos finitos e modelos constitutivos apresentados no anteriormente, são utilizados na análise não linear física e geométrica de quatro estruturas diferentes.

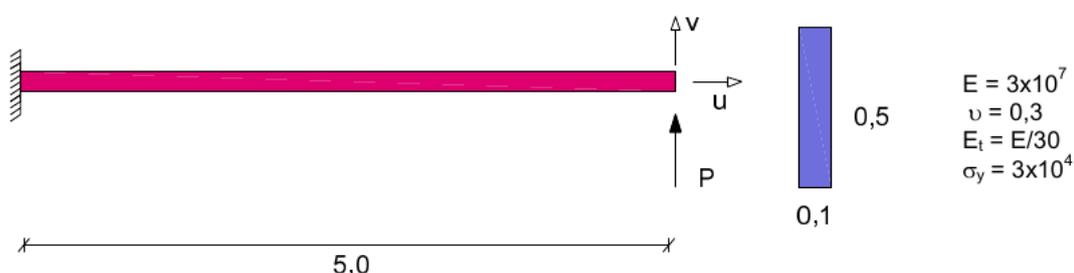
As duas primeiras correspondem a *benchmark* bem conhecidos na literatura e bastante utilizados para teste de modelos elásticos e elastoplásticos na análise de estruturas com grandes deslocamentos. O objetivo da análise destas estruturas é fazer uma verificação da implementação realizada, demonstrando a capacidade da ferramenta numérica desenvolvida neste trabalho.

Os dois últimos exemplos correspondem à estruturas de concreto armado que foram ensaiadas em laboratório com objetivo de estudar o fenômeno do colapso progressivo. Estes exemplos são utilizados inicialmente para validação dos modelos constitutivos implementados neste trabalho e posteriormente para estudo do efeito de alguns parâmetros de projeto sobre a resistência ao colapso progressivo.

4.1 Viga em Balanço

Este exemplo trata de uma viga em balanço com comprimento de 5 m e uma carga pontual atuando em sua extremidade. Detalhes sobre a seção transversal e as propriedades dos materiais utilizados são apresentados na Figura 39.

Figura 39 – Condições de contorno, geometria e propriedades do material do exemplo

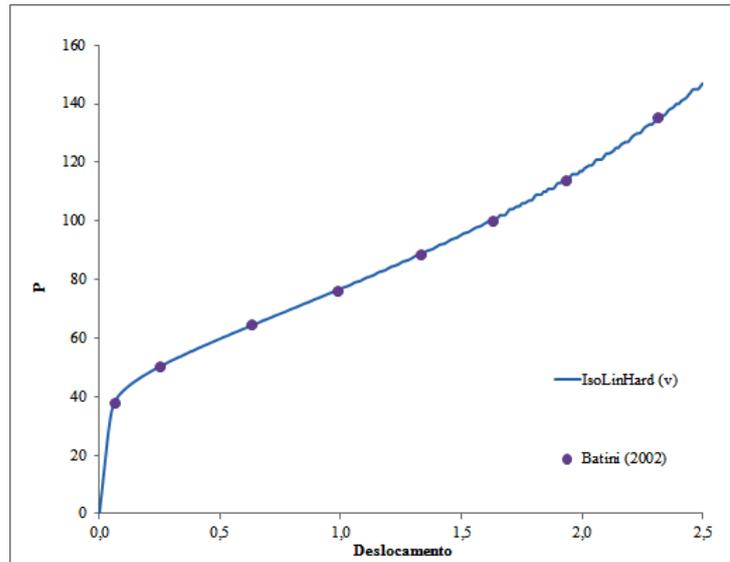


Fonte: Silva⁶⁵

A análise elástica desta estrutura foi realizada por Euler em 1744, sendo esta utilizada por diversos autores para avaliar a eficiência das suas ferramentas computacionais em representar os grandes deslocamentos de forma adequada. O fato de conhecer a sua solução analítica ser conhecida fez deste exemplo um *benchmark* utilizado em diversos trabalhos^{47,65}.

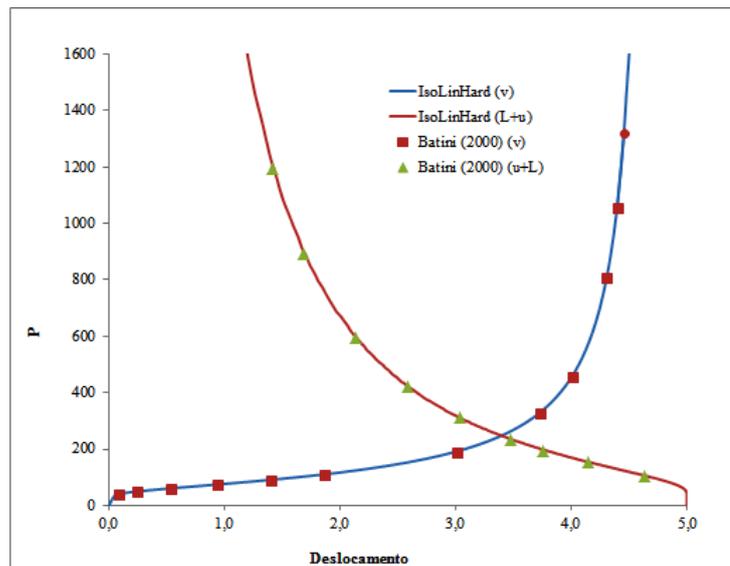
No presente trabalho foi utilizado o modelo de elastoplástico com encruamento isotrópico (ISOLINHARD) para representar o comportamento do material. A malha utilizada contém 4 elementos finitos de tamanho uniforme, tendo sido utilizadas 100 fatias para integração na seção transversal.

Figura 40 – Curva carga-deslocamento vertical da viga em balanço.



Fonte: Próprio autor.

Figura 41 – Curvas carga-deslocamento da viga em balanço.



Fonte: Próprio autor.

As curvas carga-deslocamento desta estrutura considerando as não linearidades física e geométrica são apresentadas na Figuras 40 e 41. Na primeira figura tem-se um apenas o trecho inicial do caminho de equilíbrio de maneira a analisar apenas o deslocamento vertical. Por outro lado, a segunda figura mostra o comportamento dos deslocamentos vertical e horizontal para todo o carregamento aplicado.

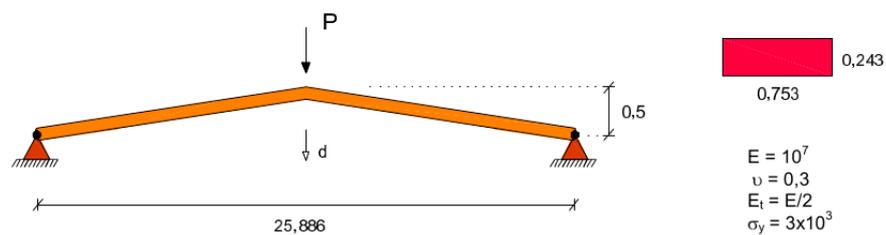
É importante destacar que não existe solução analítica conhecida desta estrutura para o caso de modelos elastoplásticos. Contudo, pode ser verificado que os resultados estão

em excelente concordância com os resultados de Batini⁴⁷.

4.2 Pórtico Toogle

O Pórtico Toggle (*Togre Frame*) é uma estrutura plana formada por duas barras com uma angulação obtusa e com dois apoios do segundo gênero. Detalhes sobre a sua geometria e propriedades materiais utilizadas são apresentados na Figura 42.

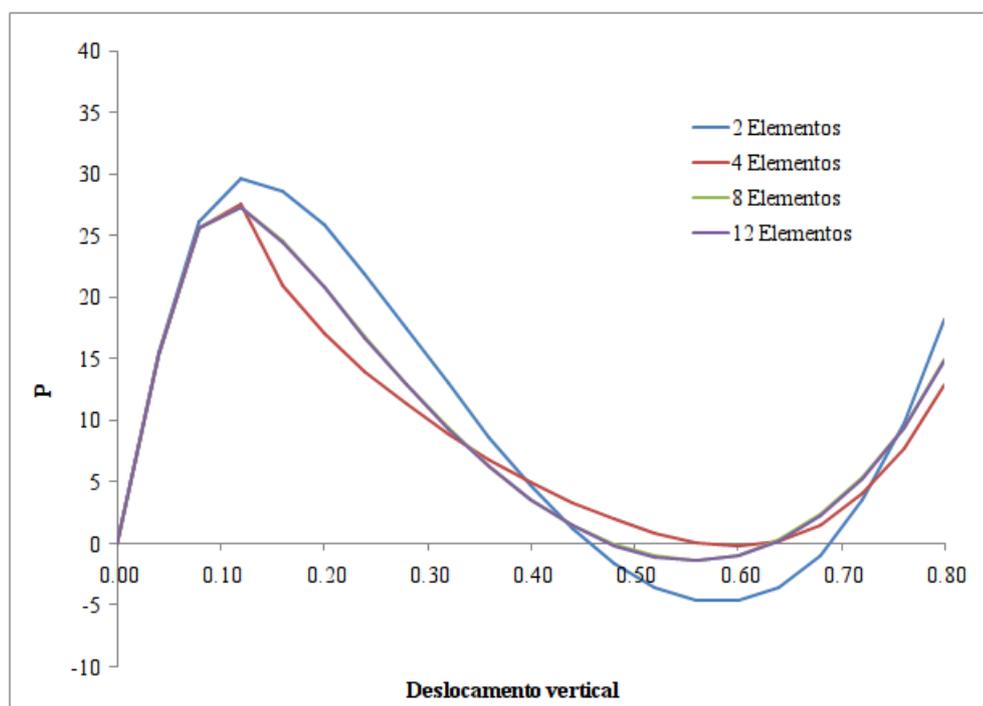
Figura 42 – Geometria e propriedades do Pórtico Toggle.



Fonte: Silva[?]

Por se tratar de um exemplo que apresenta um comportamento mais semelhante ao objeto de estudo deste trabalho, resolveu-se realizar um estudo mais detalhado da convergência da malha e da integração na seção transversal. Como pode ser visto na Figura 43, o modelo convergiu com 8 elementos (4 elementos por barra). A partir disso, não houve mais nenhuma diferença significativa com o refinamento da malha.

Figura 43 – Efeito do número de elementos.

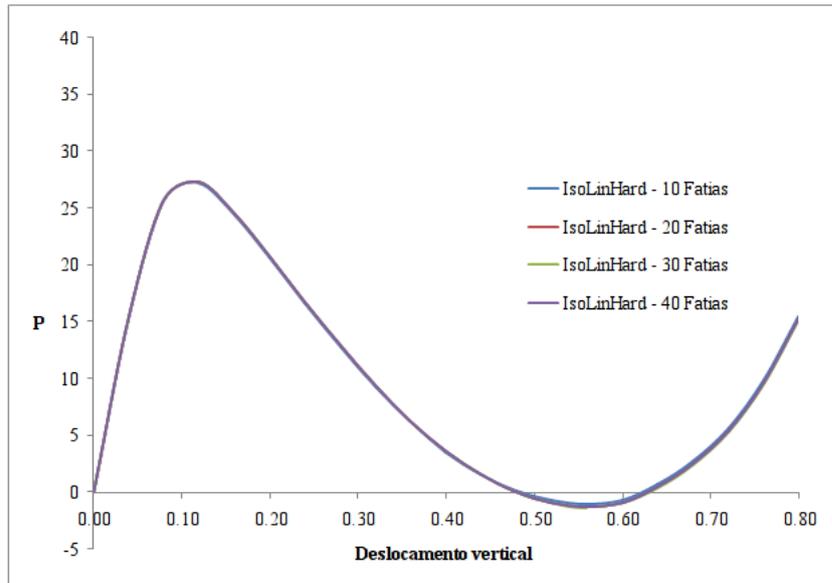


Fonte: Próprio autor.

Considerando os resultados obtidos no estudo da influência da discretização, para o estudo da integração foi utilizada uma malha de 4 elementos por barra, tendo sido variado número de pontos de Gauss e o número de fatias utilizadas na integração na seção transversal.

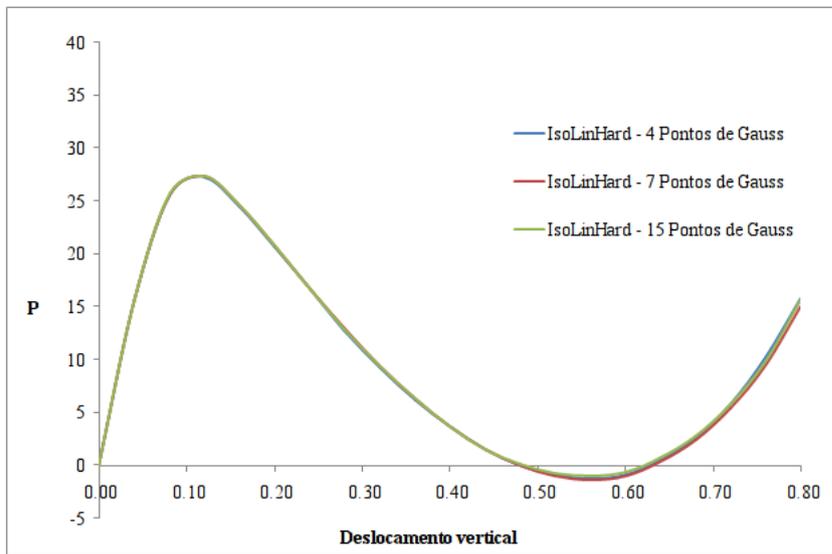
Como pode ser visto nas Figuras 44 e 45, a convergência de ambos os métodos de integração é muito rápida. Assim, verifica-se que não é necessário um grande número de fatias ou pontos de Gauss para a obtenção de resultados satisfatórios. Este aspecto é importante, porque o custo computacional, em termos tanto de memória quanto de tempo de processamento, aumenta com o número de pontos de integração adotados.

Figura 44 – Efeito do número de fatias.



Fonte: Próprio autor.

Figura 45 – Efeito no número de pontos de Gauss.

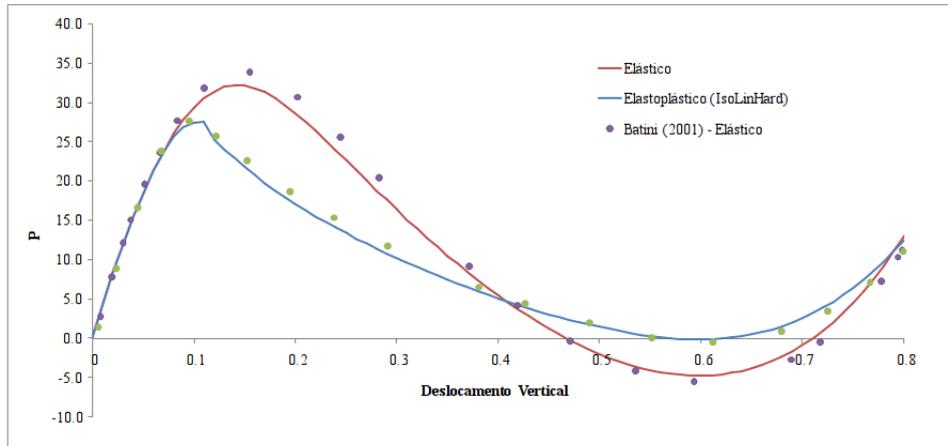


Fonte: Próprio autor.

O resultado obtido considerando 4 elementos por barra e 40 fatias na seção transversal é comparado com os resultados de Battini⁴⁷ na Figura 46. Estes resultados mostram a adequação do elemento corrotacional e do modelo elastoplástico com encruamento linear utilizados neste trabalho, haja vista a boa concordância com os resultados de Battini. Os resultados deste autor foram um pouco mais rígidos que os obtidos aqui. Este fato pode ser devido ao uso de um elemento sem a consideração da não linearidade geométrica no sistema local e menos

pontos de integração na seção transversal⁴⁷.

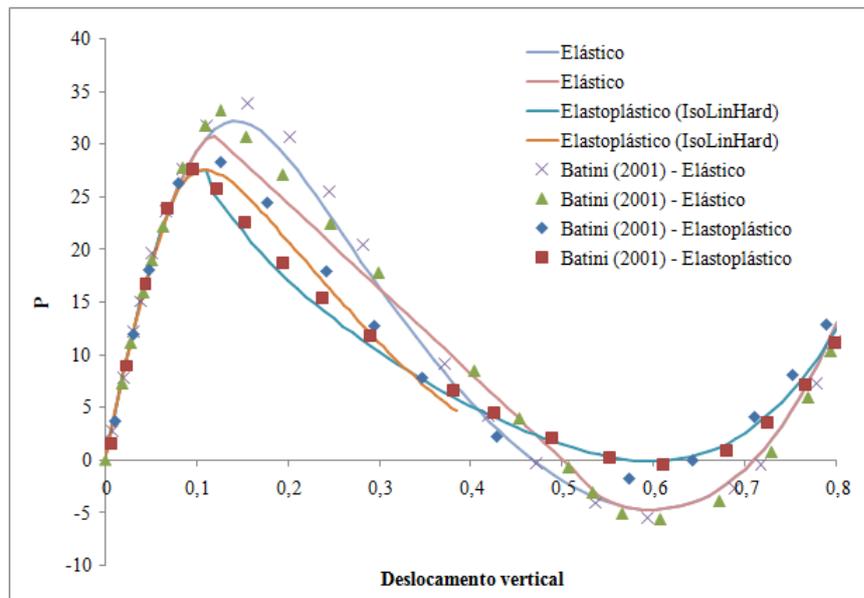
Figura 46 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle.



Fonte: Próprio autor.

Finalmente, na Figura 47, comparou-se o resultado utilizando o material elástico e colocando uma pequena imperfeição na malha para representar o efeito desta no comportamento da estrutura. Analisando a figura, percebe-se que o material elástico apresentou um comportamento muito mais rígido do que o elastoplástico, dessa forma, superestimando a capacidade de carga da estrutura, apesar de serem obtidas praticamente os mesmo deslocamento em ambos os casos.

Figura 47 – Curvas carga-deslocamento do Pórtico Toggle com imperfeição.



Fonte: Próprio autor.

No geral, pode-se afirmar que o modelo constitutivo para elastoplástico com endure-

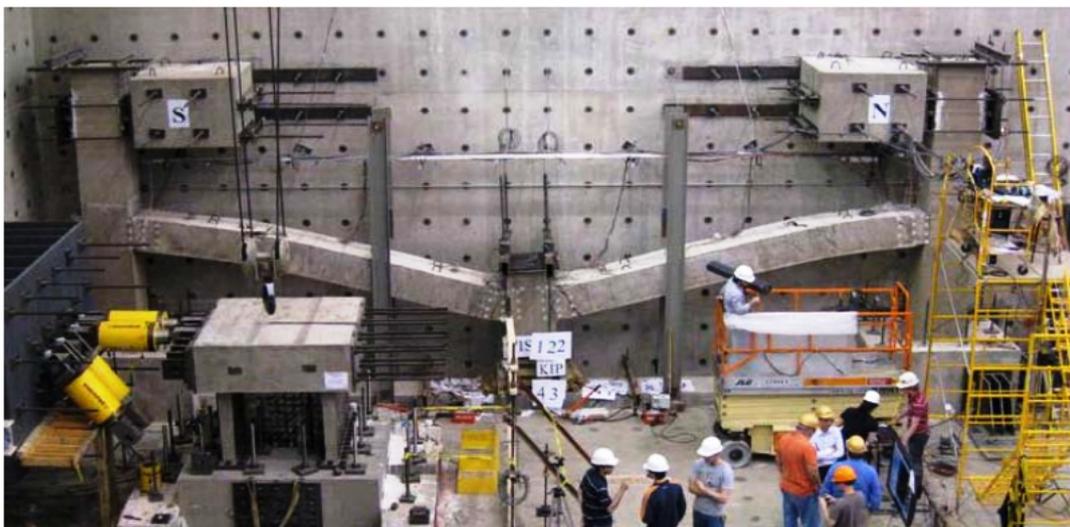
cimento linear, acrescido da não linearidade geométrica via formulação corrotacional, mostrou-se efetivo em captar o comportamento não linear física e geométrico desta estrutura.

4.3 Pórtico IMF-NIST

Este exemplo trata de um pórtico plano de concreto armado ensaiado pelo *National Institute of Standards and Technology* (NIST)⁶⁶ e descrito por Sadek¹³. Neste estudo foram ensaiados dois pórticos de concreto armado projetados para duas classes de carga sísmicas diferentes: *Intermediate Moment Frame* (IMF) para a Categoria de Projeto Sísmico C e *Special Moment Frame* (SMF) para a Categoria de Projeto Sísmico D.

Os ensaios realizados buscaram simular o efeito da perda de um dos pilares na redistribuição das cargas entre os elementos restantes. Nestes estudos as estruturas foram levadas até a ruptura, como pode ser visto na Figura 48. Mais detalhes sobre os ensaios realizados podem ser encontrados nas referências citadas.

Figura 48 – Ensaio do pórtico IMF-NIST.



Fonte: Sadek^{13,66}

Neste trabalho será considerado apenas o pórtico IMF, cujos dados de geometria, seção transversal e armadura podem ser vistos na Figura 49. Para o aço considerou-se um modelo elastoplástico bilinear cujas propriedades materiais das barras utilizadas são definidas na Tabela 6. No entanto, seguindo o modelo utilizado por Oliveira⁷ e Iribarrem⁵¹, serão adotadas valores médios dos valores citados para todas as barras da estrutura. Dessa forma, tem-se a tensão de escoamento como sendo $\sigma_y = 469$ MPa, a tensão última como sendo $\sigma_u = 645$ MPa e a deformação última como sendo $\epsilon_u = 19,5\%$. O valor do Módulo de Elasticidade foi adotado como sendo $E = 200$ GPa.

Para o concreto, ainda de acordo com os autores citados, adotaram-se os valores das propriedades do material: $f_{ck} = 38$ MPa, Módulo de Elasticidade $E = 27$ GPa e defor-

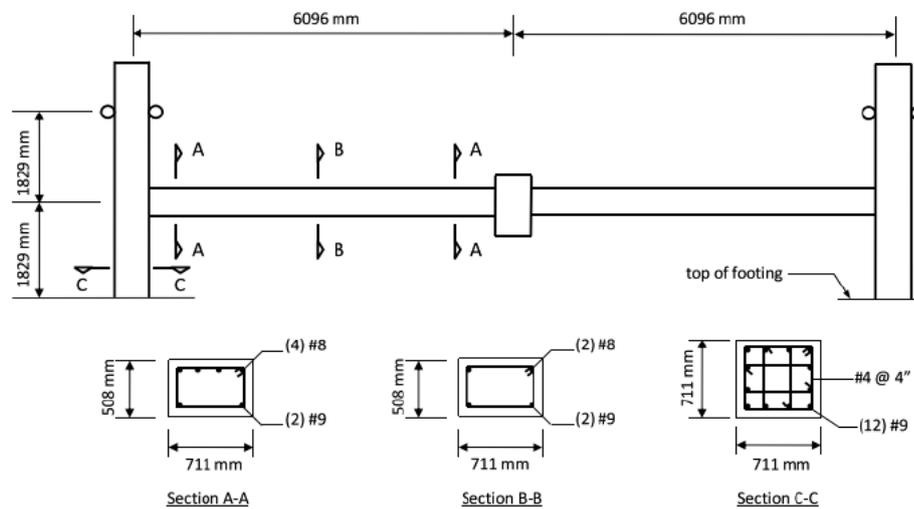
Tabela 6 – Propriedade das barras de aço do Pórtico IMF-NIST.

Elemento	Diâmetro (mm)	σ_y (MPa)	σ_u (MPa)	ϵ_u
Viga	25,4	472	648	21,0
Viga	28,65	462	641	18,0
Pilar	28,65	483	690	17,0

Fonte: Sadek⁶⁶

mação última como sendo $\epsilon_u = 0,9\%$. Deve-se este elevado valor da deformação última pela consideração do efeito do confinamento do concreto devido aos estribos.

Figura 49 – Dados do pórtico IMF-NIST.

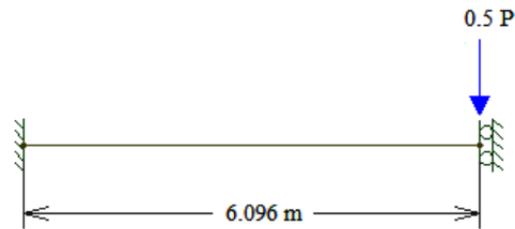


Fonte: Sadek et al. (2011).

Inicialmente estudou-se a influência do modelo estrutural adotado considerando comportamento dos materiais como elástico. Foram considerados três modelos distintos. No Modelo 1, considera-se a simetria do modelo e modela-se apenas a viga com a extremidade do pilar engastada, ver Figura 50. O Modelo 2 também considera a simetria, mas inclui o pilar de extremidade no modelo, ver Figura 50. Finalmente, o Modelo 3 considera o pórtico completo, ver Figura 50.

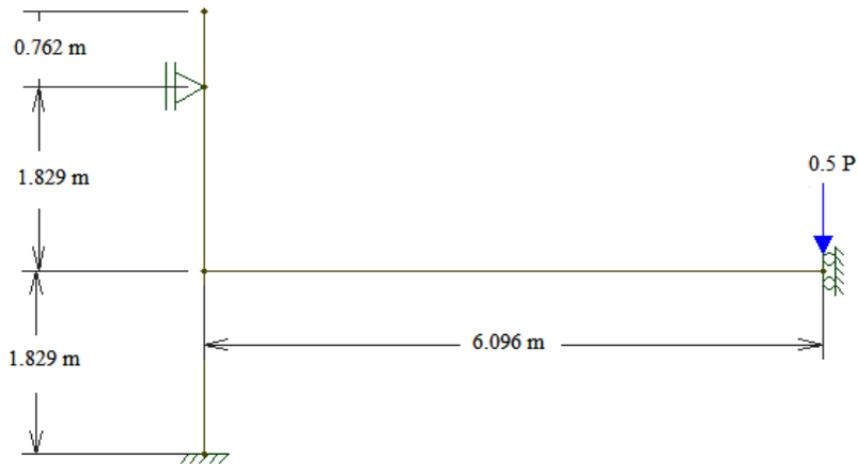
Foi adotada uma malha de 12 elementos para o Modelo 1, 21 elementos para o Modelo 2 e 44 elementos para o modelo 3. Foi utilizado o controle de deslocamentos com uma tolerância de erro de 1.10^{-5} e um máximo de 50 interação por cada *Step*. Para a integração foi utilizado 100 fatias.

Figura 50 – Modelo 1 do pórtico IMF-NIST.



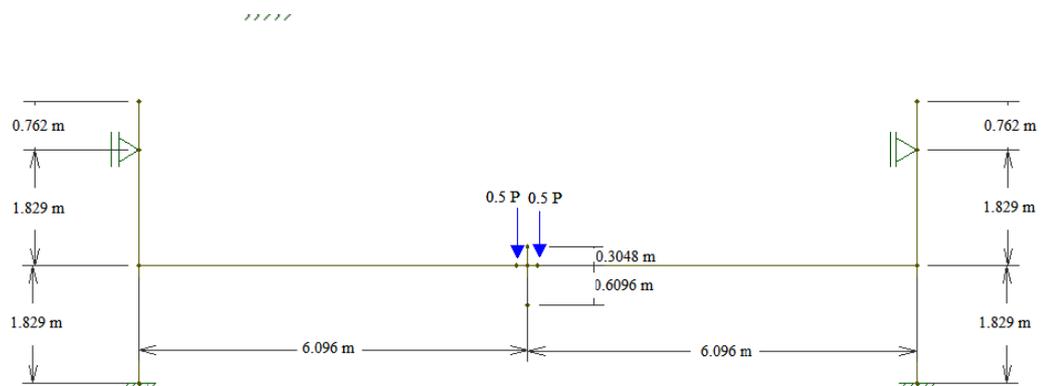
Fonte: Próprio autor.

Figura 51 – Modelo 2 do pórtico IMF-NIST.



Fonte: Próprio autor.

Figura 52 – Modelo 3 do pórtico IMF-NIST.



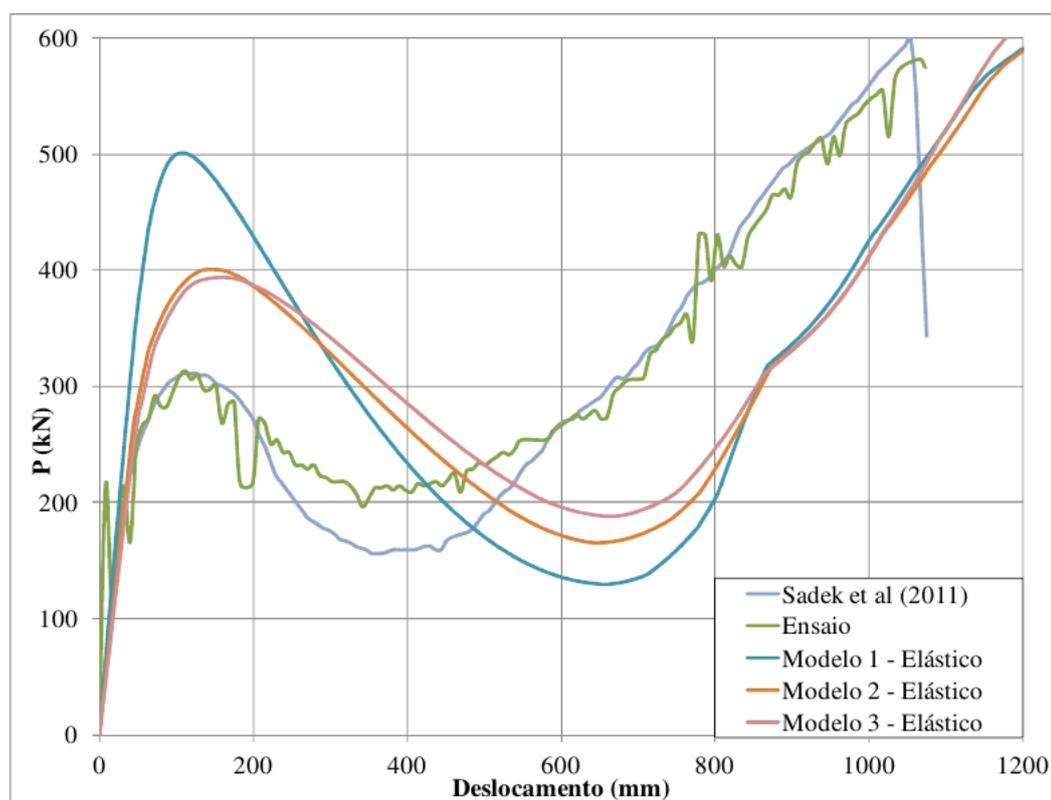
Fonte: Próprio autor.

O relatório NIST 1720⁶⁶ não fornece o cobrimento utilizado, apenas afirmando que o valor do cobrimento obedeceu aos limites prescritos pelo ACI 318-02. Neste, o valor do co-

brimento varia de no mínimo 1 polegada (25.4 mm) para concreto não expostos a intempéries ou em contato com o solo, até 3 polegadas (76.2 mm) para concreto projetado ou permanentemente expostos a intempéries ou em contato com o solo. Dessa forma, inicialmente foi utilizado o valor mínimo.

Os resultados da análise destes três modelos são apresentados no gráfico da Figura 53. Analisando as curvas, verifica-se que o Modelo 1 é excessivamente rígido e não representa de forma adequada o comportamento do pórtico ensaiado. Os modelos 2 e 3 obtiveram resultados mais próximos entre si e dos resultados experimentais. É importante notar que apesar dos modelos não conseguirem captar de forma precisa a carga de ruptura, o efeito catenária foi representado de maneira adequada. Isto mostra que a formulação corrotacional mostra-se eficiente para esse tipo de situação, mesmo com esse tipo de modelo constitutivo. Nota-se também que a consideração da ligação viga-pilar como perfeitamente rígida não representa de forma adequada o comportamento global do pórtico, mostrando a necessidade de uma modelagem mais sofisticada da ligação viga-pilar¹³.

Figura 53 – Comparação entre os modelos do pórtico IMF-NIST.

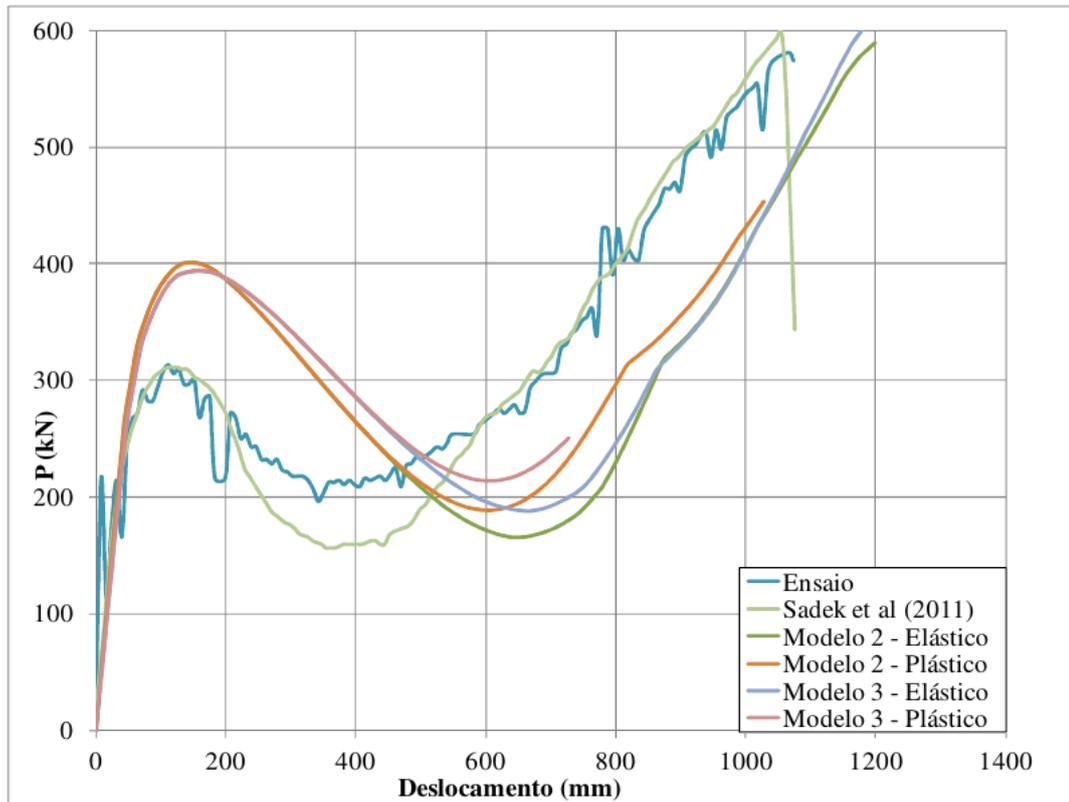


Fonte: Próprio autor.

Em seguida, avaliou-se os Modelos 2 e 3 considerando o aço com comportamento elastoplástico. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 54. Observa-se que a consideração da plasticidade do aço não teve influência significativa sobre o valor da carga máxima da estrutura (ponto limite), mas melhorou a representação da recuperação da resistência da estru-

tura devido ao efeito catenária. Por outro lado, observou-se maior dificuldade de convergência da análise, não sendo possível obter a curva carga-deslocamento completa, principalmente no caso do Modelo 3.

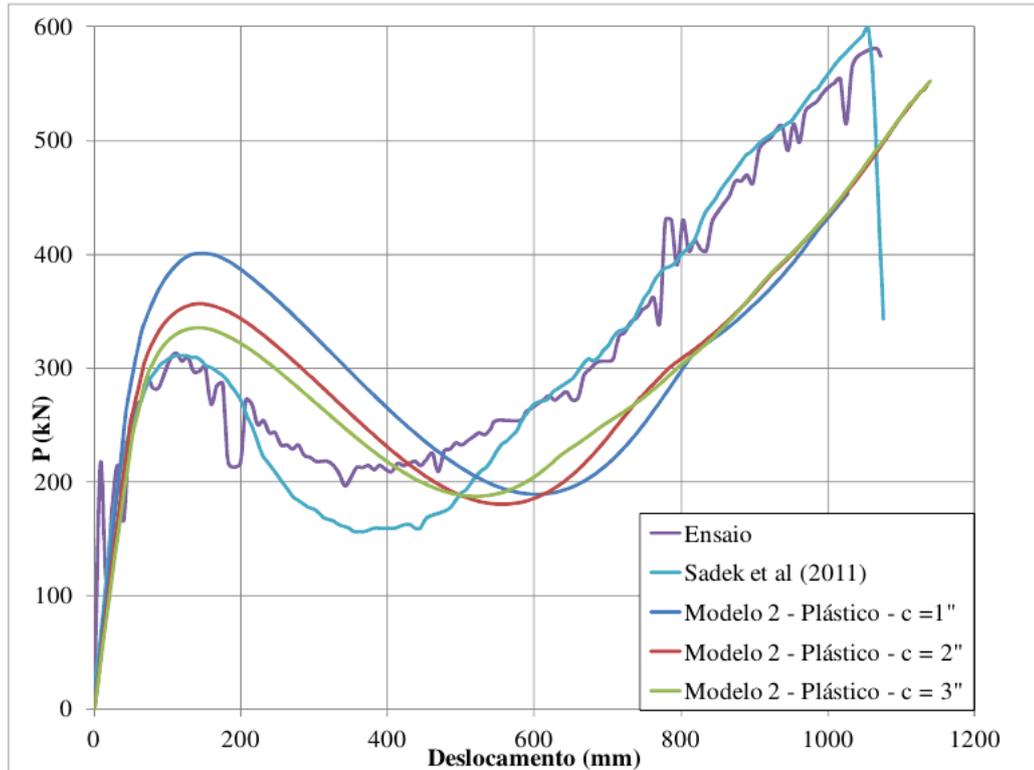
Figura 54 – Comparação entre os modelos para aço do pórtico IMF-NIST.



Fonte: Próprio autor.

Como o cobrimento da armadura não foi fornecido, resolveu-se estudar o efeito deste parâmetro sobre o comportamento da estrutura. Os resultados obtidos variando o cobrimento entre os limites mínimo e máximo do ACI são apresentados na Figura 55. Avaliando as curvas obtidas, percebe-se que a variação do cobrimento influenciou de forma significativa a carga máxima da estrutura (ponto limite), mas não teve praticamente nenhuma influência sobre a recuperação de capacidade de carga devido ao efeito catenária.

Figura 55 – Efeito do cobrimento da armadura do pórtico IMF-NIST.



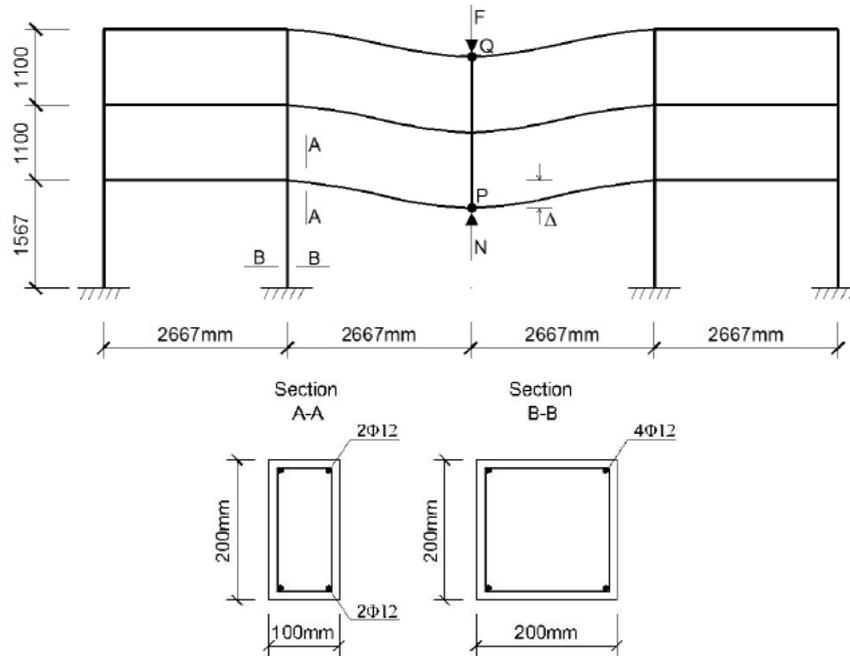
Fonte: Próprio autor.

Uma explicação para esta observação é que o aumento do cobrimento reduz o braço do binário entre os bordos comprimidos e tracionados, reduzindo o momento resistente da viga. Por outro lado, o efeito catenária está ligado à tração que aparece na viga para grandes deslocamentos, fazendo com que ela trabalhe de forma semelhante a um tirante. Assim, para o efeito catenária o determinante é a área de aço, sem importar sua distribuição na seção transversal.

4.4 Pórtico de Yi

O segundo exemplo utilizado para estudo paramétrico é um pórtico plano de três andares e quatro vãos ensaiado por Yi¹². Este pórtico foi projetado segundo o Código Normativo Chinês e foi construído em um terço da uma escala real. Este pórtico é apresentado na Figura 56.

Figura 56 – Geometria e seções transversais do Pórtico de Yi.



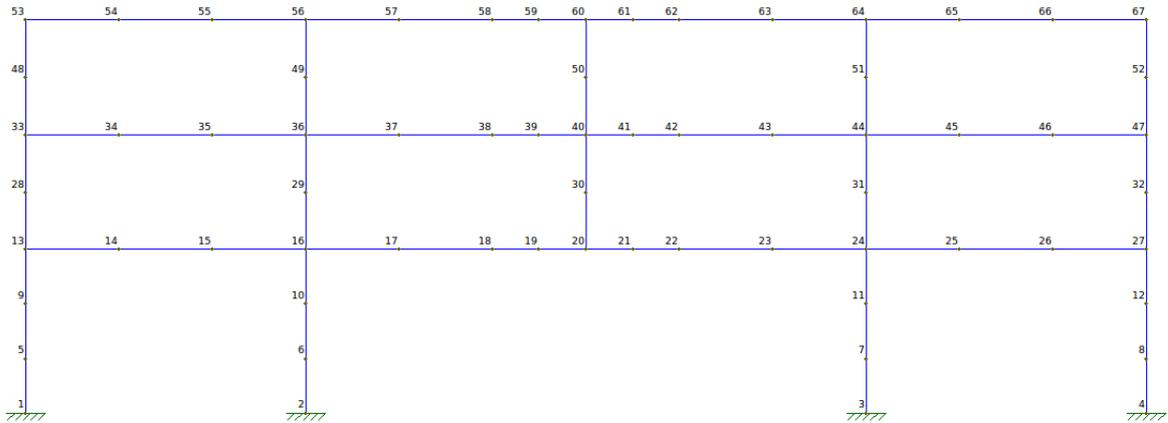
Fonte: Yi¹² e Oliveira².

Para o aço foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento linear e ruptura (REBAR) com Módulo de Elasticidade de 200GPa , tensão de escoamento e última de 416 MPa e 526 MPa, respectivamente. Além disso, considerou-se que o aço tem uma deformação última igual a 10 %. Para o concreto, foi considerado um modelo elástico multilinear com um resistência a compressão de 25 MPa. O módulo de elasticidade foi estimado como segundo a NBR 6118²⁶ como sendo $E = 0.85 \times 5600 \sqrt{f_{ck}}$ e, portanto, tem o valor de 23.8 GPa. A deformação última do concreto na compressão foi estimada como sendo 0.35% e a resistência à tração foi desprezada.

Realizou-se uma análise por Controle de Carga com uma tolerância de 1.10^{-5} e máximo de 50 interações por passo de carga. A carga $F = 109\text{ kN}$ aplicada no topo do pórtico é mantida constante durante a análise. Por outro lado, a carga N é inicialmente igual à F , mas é reduzida paulatinamente de maneira a simular a perda do pilar.

Foram utilizados 74 elementos finitos corrotacionais, sendo 5 por cada coluna do solo para o topo, 4 elementos por viga imediatamente adjacentes ao pilar retirado e 3 para as demais vigas, como mostrado na Figura 57. A integração na seção transversal foi realizada utilizando 100 fatias, de forma a garantir uma alta precisão.

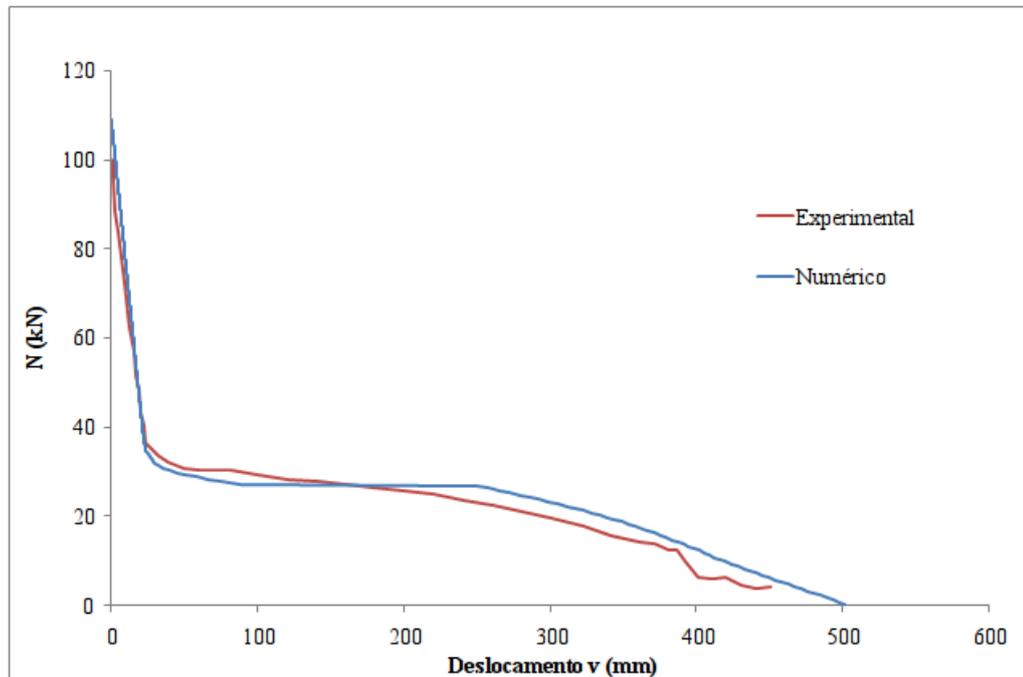
Figura 57 – Malha utilizada no Pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

A curva carga (N) x deslocamento vertical do ponto P é mostrada na Figura 58. Pode-se perceber que o modelo de elementos finitos adotado apresentou boa aproximação do resultado experimental. Observa-se que, para deslocamentos em torno de 30 mm a estrutura apresenta uma perda significativa de rigidez e grande aumento dos deslocamentos verticais, caracterizando a falha da estrutura inicial da estrutura. Contudo, com o crescimento dos deslocamentos verticais do ponto P as vigas adjacentes passam a trabalhar como tirantes (efeito catenária), permitindo a redistribuição dos esforços e um ganho de rigidez e capacidade de carga por parte da estrutura.

Figura 58 – Relação carga-deslocamento do pórtico de Yi.

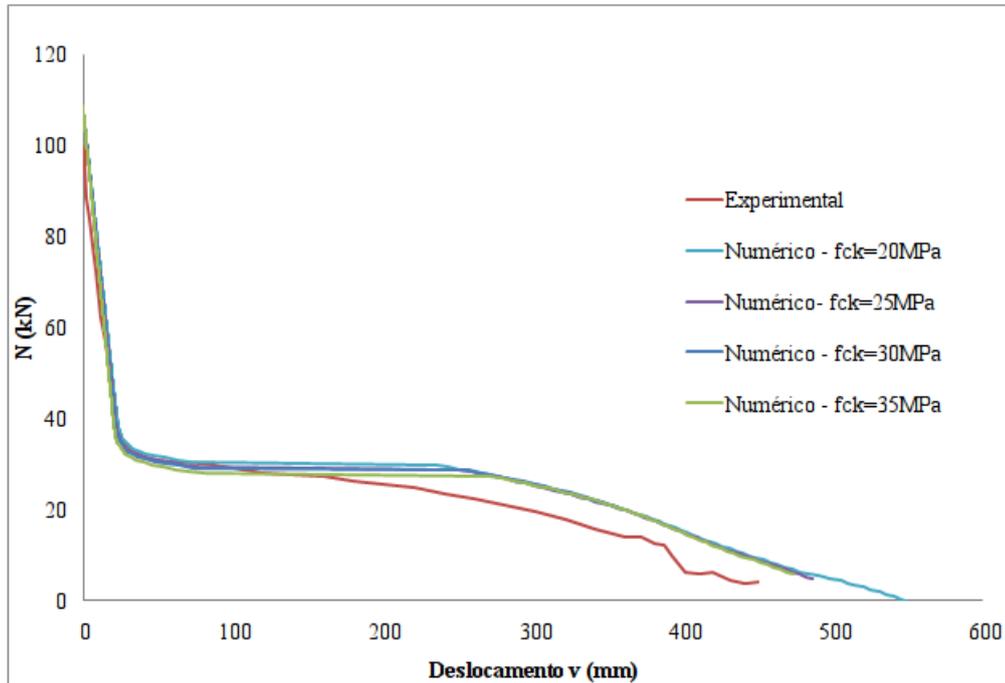


Fonte: Próprio autor.

Vale a pena ressaltar que tentou-se utilizar os modelos elastoplástico e de dano bilinear para o concreto, mas estes apresentaram problemas de convergência, não sendo possível obter a curva carga-deslocamento da estrutura. Como os resultados obtidos utilizando o modelo elástico multilinear para o concreto foram muito bons, considerou-se mais importante para o presente trabalho estudar o efeito de alguns parâmetros de projeto sobre a resistência ao colapso progressivo.

Inicialmente fez-se variar a resistência do concreto entre 20 MPa e 35 MPa, mantendo constantes os demais parâmetros do modelo. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 59. Analisando os caminhos de equilíbrio obtidos, conclui-se que o incremento da resistência do concreto leva a um pequeno aumento na carga de falha inicial da estrutura. Por outro lado, este parâmetro não teve efeito significativo sobre o ganho de resistência da estrutura após o aparecimento do efeito catenária. Deve-se a isto o fato de que, o efeito catenária só tem início depois da falha da estrutura de concreto, estando mais relacionado com as propriedades da armadura.

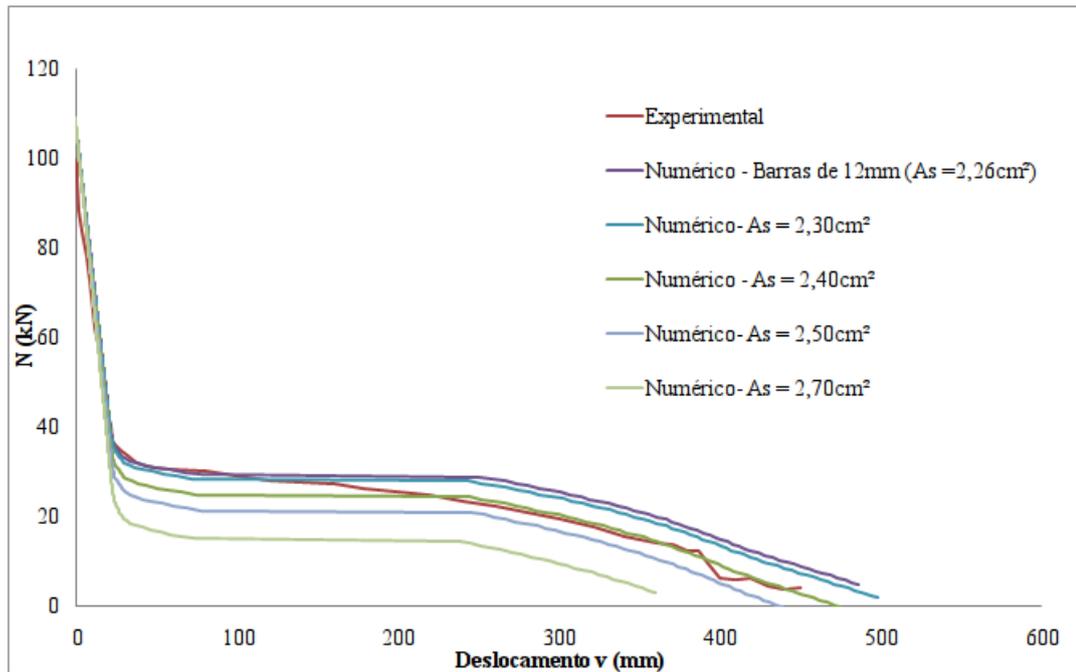
Figura 59 – Variação do f_{ck} do Pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

Assim, para estudar o efeito da armadura, inicialmente variou-se a área de aço de em cada bordo de vigas e pilares de $2,26\text{cm}^2$ ($2\phi 12$ mm) até $2,70\text{cm}^2$. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 60. Estes resultados mostram que mesmo com uma pequena variação da área de aço, houve um significativo ganho de resistência ao colapso progressivo. Esta observação está de acordo com os resultados obtidos por Iribarren⁵¹ e Oliveira[?].

Figura 60 – Variação da área de aço do Pórtico de Yi.



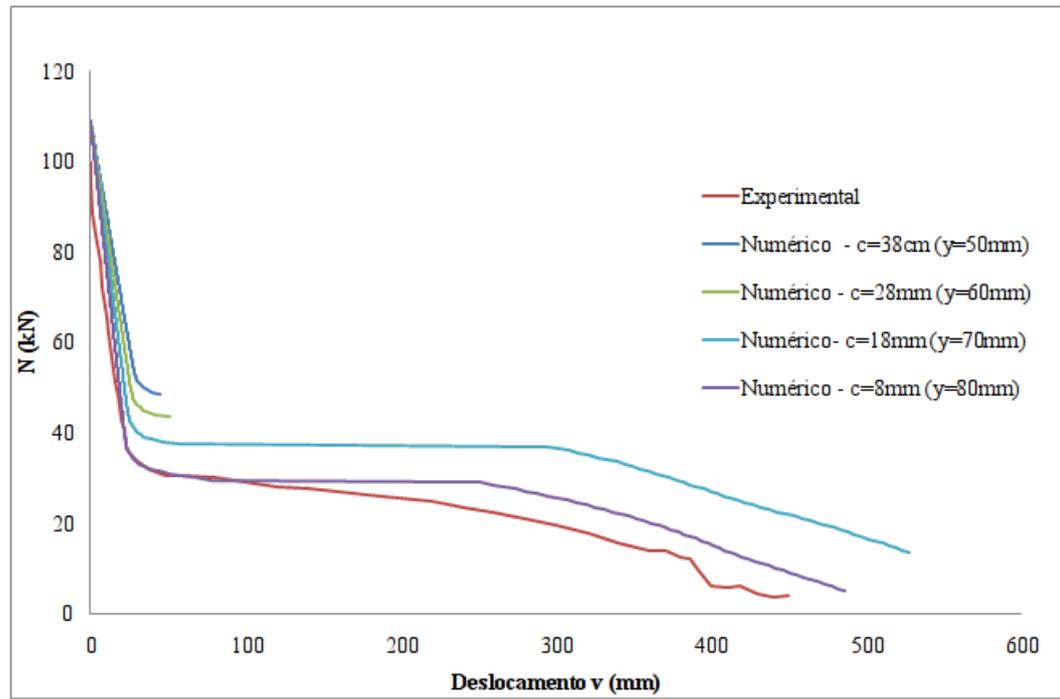
Fonte: Próprio autor.

Por fim, variou-se também o cobrimento da armadura de maneira semelhante ao exemplo realizado no exemplo anterior. Neste estudo o cobrimento (c) foi variado de 8 mm a 38 mm, variando-se em consequência a a distância (y) da armadura em relação ao centroide da seção transversal:

$$y = \frac{h}{2} - \left(c + \frac{\phi}{2} + \phi_t \right) \quad (106)$$

onde $\phi_t = 6$ mm é o diâmetro da armadura transversal (estribos). Os resultados obtidos são apresentados na Figura 61. Analisando os resultados, percebe-se que este parâmetro tem grande influência sobre a carga de falha inicial da estrutura. Por outro lado, o ganho de capacidade de carga devido ao efeito catenária varia muito pouco com este parâmetro. Estas observações estão de acordo com o que já havia sido observado no exemplo anterior.

Figura 61 – Variação do cobrimento da armadura do Pórtico de Yi.



Fonte: Próprio autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram implementados modelos constitutivos não elásticos de forma a criar uma ferramenta adequada para a modelagem do Colapso Progressivo. Ao todo, foram incluídos 6 modelos constitutivos diferentes divididos entre os baseados na Mecânica do Dano e na Teoria da Plasticidade.

Como o foco deste trabalho restringiu-se muito mais a implementação e modelagem do Colapso Progressivo não foram explorados aqui aspectos normativos e mais específicos do problema, deixando isto para trabalhos futuros.

No estudo paramétrico, observou-se que a área de aço foi o parâmetro que apresentou maior sensibilidade no que diz respeito a resposta do modelo. Para um pequeno incremento da área de aço observou-se grande variação das curva tensão-deformação dos problemas estudados. Já a resistência do concreto mostrou-se praticamente desprezível no que diz respeito ao desempenho da estrutura ao CP. No entanto, o cobrimento, apesar de não ter tido tanta influência na capacidade de recuperação devido ao efeito catenária, a sua variação alterou significativamente a rigidez da estrutura como um todo. Estes resultados mostram-se importantes, pois observou-se que em muitos trabalhos verifica-se a ausência de parâmetros importantes como estes e que podem alterar ou dificultar a reprodução da estrutura em estudo.

Ao final, pode-se verificar que os modelos implementados foram capazes de representar os problemas em estudo tanto em modelos de viga quanto de pórtico. No entanto, os modelos de plasticidade e dano relacionados com o softening apresentaram problemas e não puderam ser inclusos nos exemplos.

Vendo que este trabalho é o primeiro desta linha de pesquisa relacionado ao Colapso Progressivo no Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, citam-se abaixo uma série de sugestões de trabalhos futuros que poderão ser realizados a partir da ferramenta desenvolvida. No entanto, acredita-se que o potencial de utilização da ferramenta desenvolvida vai além disto e que, desta forma, pode-se considerar que os principais objetivos almejados foram cumpridos.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Visando a continuidade deste trabalho, são sugeridos temas de pesquisa importantes para a melhor compreensão do Colapso Progressivo de estruturas de concreto:

- Estudo e solução do problema de convergência apresentados pelos modelos constitutivos inelástico para o concreto.
- Consideração dos efeitos dinâmicos causados pela retirada brusca de um pilar.
- Modelagem do colapso progressivo de estruturas de concreto com vigas protendidas.

- Desenvolvimento de modelos para representação adequada do comportamento das ligações viga-pilar próximo ao colapso da estrutura.
- Uso de modelos de pórtico espacial para melhor representar a redistribuição de esforços em edifícios de concreto após a retirada de um pilar.
- Consideração do efeito das lajes sobre o colapso progressivo.
- Simulação do comportamento de um edifício real submetido a retirada de um pilar de maneira a avaliar a adequação das normas técnicas sobre colapso progressivo.

REFERÊNCIAS

- 1 ELLINGWOOD, B. R.; SMILOWITZ, R.; DUSENBERRY, D. O.; DUTHINH, D.; LEW, H.; CARINO, N. J. Best practices for reducing the potential for progressive collapse in buildings. Technical report, NISTIR 7396 - National Institute of Standards and Technology, 2007.
- 2 (GSA), U. S. G. S. A. United states general services administration (gsa). alternate path analysis and design guidelines for progressive collapse resistance, 2013.
- 3 Department of defense (dod). (2003). unified facilities criteria (ufc): Design of structures to resist progressive collapse.
- 4 PEARSON, C.; DELATTE, N. Ronan point apartment tower collapse and its effect on building codes, 2005.
- 5 GOREN, F.; KOSTEM, C. N. Progressive collapse of bultistory buildings, a case study. Technical report, Fritz Engineering Laboratory, Department of civil Engineering, Lehigh University Bethlehem, Pennsylvania, 1990.
- 6 <https://www.fbi.gov/about-us/history/famous-cases/oklahoma-city-bombing>.
- 7 "<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2012/01/peritos-investigam-causas-de-desabamento-no-rio.html>", Acessado em Setembro 2014.
- 8 ELLINGWOOD, B.; LEYENDECKER, E. Approaches for design against progressive collapse. **J. Struct. Div.**, , n. 104(3), p. 423–423, 1978.
- 9 MOHAMED, O. A. Progressive collapse of structures: Annotated bibliography and comparison of codes and standards. **JOURNAL OF PERFORMANCE OF CONSTRUCTED FACILITIES ASCE**, p. 418–425., November 2006.
- 10 LI, Y.; LU, X.; GUAN, H.; YE, L. An improved tie force method for progressive collapse resistance design of reinforced concrete frame structures. **Engineering Structures**, 2011.
- 11 SALEM, H.; EL-FOULY, A.; TAGEL-DIN, H. Toward an economic design of reinforced concrete structures against progressive collapse. **Engineering Structure**, 2011.
- 12 YI, W.-J.; HE, Q. F.; XIAO, Y.; KUNNATH, S. K. Experimental study on progressive collapse resistant behavior of reinforced concrete frame structures. **ACI STRUCTURAL JOURNAL**, 2008.
- 13 SADEK, F.; MAIN, J.; LEW, H. S.; BAO, Y. Testing and analysis of steel and concrete beam-column assemblies under a column removal scenario. **Engineering Structure**, 2011.
- 14 SASANI, M.; KROPELNIKI, J. Progressive collapse analysis of an rc structure. **THE STRUCTURAL DESIGN OF TALL AND SPECIAL BUILDINGS**, p. 757–771, 2008.
- 15 QIN, X.; WANG, W.; CHEN, Y.; BAO, Y. Experimental study of through diaphragm connection types under a column removal scenario, 2015.
- 16 YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive col-

- lapse: Experimental tests of beam-column joints and development of component-based models, 2013.
- 17 YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive collapse: Mechanical modelling of bolted-angle connections under tension, 2013.
 - 18 Minimum design loads for buildings and other structures, 2010.
 - 19 Actions on structures – part 1-7: General actions – accidental actions., 2006.
 - 20 STAROSSEK, U. Typology of progressive collapse, 2007.
 - 21 KHANDELWAL, K.; EL-TAWIL, S. Assessment of progressive collapse residual capacity using pushdown analysis. **Structural Congress 2008**, 2008.
 - 22 KHANDEWAL, K.; EL-TAWIL, S. Pushdown resistance as a measure of robustness in progressive collapse analysis. **Engineering Structure**, p. 2653–2661, 2011.
 - 23 LIVINGSTON, E.; SASANI, M.; BAZAN, M.; SAGIROGLU, S. Progressive collapse resistance of rc beams. **Engineering Structures**, 2015.
 - 24 MENCHEL, K. **Progressive collapse: Comparison of main standards, formulation and validation of new computational procedures**. 2009 – UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES, 2009.
 - 25 REESE, S.; TONG, L. H. Federal building and facility security. Technical report, Congressional Research Service, 2010.
 - 26 Associação brasileira de normas técnicas(abnt) nbr 6118 : 2014. projeto de estruturas de concreto armado - procedimento.
 - 27 Building code requirements for structural concrete (aci 318-11), 2011.
 - 28 JIAN, H.; ZHENG, Y. Simplified models of progressive collapse response and progressive collapse-resisting capacity curve of rc beam-column substructures. **J. Perform. Constr. Facil.**, 2014.
 - 29 VALIPOUR, H. R.; FOSTER, S. J. Finite element modelling of reinforced concrete framed structures including catenary action. **Computers & Structures**, 2010.
 - 30 "<http://engineering.uottawa.ca/downloads/pdf/blast.pdf>", Acessado em Setembro 2014.
 - 31 KIM, S.; LEE, C.-H.; LEE, K. Effects of floor slab on progressive collapse resistance of steel moment frames. **Journal of Constructional Steel Research**, 2015.
 - 32 YI, W.-J.; ZHANG, F.-Z.; KUNNATH, S. K. Progressive collapse performance of rc flat plate frame structures. **J. Struct. Eng.**, 2014.
 - 33 KEYVANI, L.; SASANI, M.; MIRZAEI, Y. Compressive membrane action in progressive collapse resistance of rc flat plates. **Engineering Structures**, 2014.

- 34 KOKOT, S.; ANTHOINE, A.; NEGRO, P.; SOLOMOS, G. Static and dynamic analysis of a reinforced concrete flat slab frame building for progressive collapse. **Engineering Structures**, 2012.
- 35 EL-TAWIL, S.; LI, H.; KUNNATH, S. Computational simulation of gravity-induced progressive collapse of steel-frame buildings: Current trends and future research needs. **J. Struct. Eng.**, 2014.
- 36 LEW, H. S.; MAIN, J. A.; ROBERT, S. D.; SADEK, F.; CHIARITO, V. P. Performance of steel moment connections under a column removal scenario. i: Experiments. **JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING - ASCE**, 2013.
- 37 QIN, X.; WANG, W.; CHEN, Y.; BAO, Y. Experimental study of through diaphragm connection types under a column removal scenario. **Journal of Constructional Steel Research**, 2015.
- 38 YANG, B.; TAN, K. H. Robustness of bolted-angle connections against progressive collapse: Mechanical modelling of bolted-angle connections under tension. **Engineering Structures**, 2013.
- 39 YANG, B.; TAN, K. H. Behavior of composite beam-column joints in a middle-column-removal scenario: Experimental tests. **J. Struct. Eng.**, 2014.
- 40 LI, Y.; LU, X.; GUAN, H.; YE, L. An improved tie force method for progressive collapse resistance design of reinforced concrete frame structures. **Engineering Structure**, 2011.
- 41 British standard institute. bs6399: Loading for buildings, part 1: code of practice for dead and imposed loads. london (united kingdom); 1996.
- 42 British standard institute. bs8110: structural use of concrete, part 1: code of practice for design and construction. united kingdom; 1997.
- 43 Design of concrete structures - part 1-1 : General rules and rules for buildings, 2006.
- 44 MEIRELES NETO, M. **Estabilidade de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas**. 2012 – Universidade Federal do Ceará, 2012.
- 45 PARENTE JR, E.; NOGUEIRA, G. V.; NETO, M. M.; MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames, 2014.
- 46 CRISFIELD, M. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. Jhon Wiley & Sons, INC., 1991. v. VOL. 1.
- 47 BATTINI, J.-M. Co-rotational beam elements in instability problems, 2002.
- 48 COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. **Concepts and applications of finite element analysis**. Fourth edition. ed. Jhon Wiley & Sons, INC., 2002.
- 49 BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 1996.
- 50 RUGGIERO, M.; LOPES, V. **Cálculo numérico, aspectos teóricos e computacionais**.

- 1996.
- 51 IRIBARREN, S.; BERKE, P.; BOUILLARD, P.; VANTOMME, J.; MASSART, T. Investigation of the influence of design and material parameters in the progressive collapse analysis of rc structures. **Engineering Structure**, 2011.
- 52 OLIVEIRA, C. E. M. AND MARCHIS, A. G.; BERKE, P. Z.; SILVEIRA, R.; MASSART, T. Computational analysis of a rc planar frame using corotational multilayered beam fe, correlated to experimental results. **XXXIV CILAMCE**, 2013.
- 53 OLIVEIRA, C. E. M.; BERKE, P. Z.; SILVEIRA, R.; MASSART, T. Computational assessment of the progressive collapse of a five storey structure considering two different building codes. **4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering**, 2013.
- 54 CHEN, W.-F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineering**. 2007.
- 55 SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational inelasticity**. Springer, 2000.
- 56 YAW, L. L. Nonlinear static - 1d plasticity - various forms of isotropic hardening, 2012.
- 57 PROENÇA, S. P. B. Elementos de mecânica do dano em meios contínuos, 2000.
- 58 NETO, E. S.; PERIC, D.; OWEN, D. **Computational methods for plasticity theory and applications**. John Wiley and Sons Ltda, 2008.
- 59 ZHANG, W.; CAI, Y. **Continuum damage mechanics and numerical applications**. Springer, 2010.
- 60 LÉGERON, F.; PAUTRE, P.; MAZARS, J. Damage mechanics modeling of nonlinear seismic behavior of concrete structures. **Journal of Structural Engineering, ASCE, 2005.**, 2005.
- 61 RAGUENEAU, F.; LA BORDERIER, C.; MAZARS, J. Constitutive equations for brittle materials: Damage, anelasticity, friction and unilateral effect coupling, 2000.
- 62 ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013 – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 63 JUNIOR, E. M. D. **Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos**. 2013 – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 64 MORORÓ, L. A. T. **Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina**. 2013 – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 65 DA SILVA, S. S. **Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas**. 2011 – Universidade de Brasília (UNB), 2011.
- 66 LEW, H. S.; BAO, Y.; SADEK, F.; MAIN, J. A.; PUJOL, S.; SOZEN, M. A. An experimental and computational study of reinforced concrete assemblies under a column removal scenario. Technical report, NIST 1720 - National Institute of Standards and Technology,

2011.